

### Písémka č. 1 - 2. 4.

1. Nechť  $a > 0$ . Rozložte do Fourierovy řady na intervalu  $(-\pi, \pi)$  funkci

$$f(x) = \sin(ax).$$

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci vzniklé řady.

2. Nechť  $a \in \mathbb{C}$ . Spočítejte

$$\int_{|z|=k|a|} \frac{z e^z}{(z-a)^3} dz$$

pro hodnoty  $k = \frac{1}{2}$  a  $k = 2$ . Kružnice se probíhají v kladném smyslu. Kdy budou oba výsledky stejné?

### Řešení

1. Funkce  $f(x)$  je lichá, takže  $a_k = 0$  pro všechna  $k \in \mathbb{N}_0$ . Pro sinové koeficienty máme

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax) \sin(kx) dx = | \text{per partes} | \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\sin(ax) \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \frac{a}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) \cos(kx) dx = \\ &= -\frac{1}{k\pi} \left( (-1)^k \sin(a\pi) - (-1)^k \sin(-a\pi) \right) + \frac{a}{\pi k} \left[ \cos(ax) \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a^2}{k^2} b_k \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{k^2 - a^2}{k^2} b_k = \frac{2(-1)^{k+1} \sin(a\pi)}{k\pi}$$

a

$$b_k = \frac{2(-1)^{k+1} k \sin(a\pi)}{\pi(k^2 - a^2)}$$

Ovšem toto celé projde jen v případě, že  $a \notin \mathbb{N}$ . Pokud je  $a$  přirozené číslo, dostáváme takto  $b_k = 0$  pro  $k \neq a$  a přirozeně  $b_a = 1$ , protože v takovém případě je  $\sin(ax)$  sám sobě svým Fourierovým rozvojem.

Celkově platí pro  $a \notin \mathbb{N}$

$$\sin(ax) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1} k \sin(a\pi)}{\pi(k^2 - a^2)} \sin(kx).$$

Protože  $f(x)$  je spojitá se spojitou derivací všude v  $(-\pi, \pi)$ , podle věty o konvergenci Fourierových řad řada vpravo konverguje bodově a lokálně stejnoměrně na tomto intervalu. V krajních bodech  $x = \pm\pi$  je řada vpravo nulovou řadou a konverguje tak k nule, což je aritmetický průměr hodnot  $\pm \sin(a\pi)$ .

2. Pro  $a = 0$  nedává úloha smysl. Dále tedy pouze  $a \neq 0$ . Pro  $k = \frac{1}{2}$  je zadaná funkce na vnitřku dané kružnice holomorfní. Proto je její integrál přes tuto kružnici roven nule.

Pro  $k = 2$  to už neplatí, můžeme ale použít přímo Cauchyův vzorec a to pro druhou derivaci funkce  $f(z) = z e^z$ :

$$f''(a) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z|=2|a|} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz,$$

proto hledaný integrál má hodnotu

$$\int_{|z|=2|a|} \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz = \pi i (2+a) e^a.$$

Oba výsledky budou stejné jen v případě, že ten druhý bude roven nule. Protože  $\pi i e^a \neq 0$ , zůstává jediná možnost  $a = -2$ .