Písemka č. 2 - 23. 4.

1. Spočítejte
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} \, \mathrm{d}x.$$

2. Spočítejte (ve smyslu hlavní hodnoty)
$$I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2 - 1)}.$$

Řešení

1. Trojčlen ve jmenovateli má kořeny $z_{1,2} = -2 \pm 4\mathrm{i}$. Zavedeme proto funkci
$$f(z) = \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$
a hledaný integrál pak bude $I = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = \operatorname{Im} J$. Definujeme integrační křivku jako horní půlkružnici o poloměru R. Její rovná část dá integrál
$$\int_{-R}^{R} f(z)\,\mathrm{d}z \to J, \qquad R \to \infty.$$
Integrál přes oblouk půlkružnice vyřešíme Jordanovým lemmatem, kde $\alpha = 1$ a $M_R \sim \frac{1}{R} \to 0$. Proto
$$\int_{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0, \qquad R \to \infty.$$
Použitím reziduové věty pak bude
$$\begin{aligned} J = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{z_1} f &= 2\pi\mathrm{i}\frac{(-2 + 4\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{-4-2\mathrm{i}}}{-2 + 4\mathrm{i} - (-2 - 4\mathrm{i})} \\ &= \frac{\pi}{2\,\mathrm{e}^4}\left(-\cos 2 + 2\sin 2 + \mathrm{i}(\sin 2 + 2\cos 2)\right) \end{aligned}$$
a nakonec
$$I = \operatorname{Im} J = \frac{\pi}{2\,\mathrm{e}^4}(\sin 2 + 2\cos 2)$$

2. Zavedeme funkci

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}(z^2-1)},$$

která má póly v bodech $z_{1,2} = \pm 1$. Bereme takovou větev odmocniny, která startuje z hodnoty $\sqrt{1} = 1$ pro úhel $\varphi = 0$, je spojitá pro $\varphi \in [0, 2\pi)$ a vrátí se tak na kladnou reálnou poloosu zespodu s hodnotami odpovídajícími $\sqrt{1} = -1$. Integrujeme přes "Pacmana s vykouslým zubem", protože zadaná funkce má pól na kladné reálné poloose, ten tak musíme obkružovat. Křivka, kterou budeme používat, tak bude mít šest částí

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \qquad t \in [\varepsilon, 1-\gamma_1(\varepsilon,\eta)] \cup [1+\gamma_2(\varepsilon,\eta), R]\\
&\varphi_2(t) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [\pi - \delta_1(\varepsilon,\eta), \delta_2(\varepsilon,\eta)]\\
&\varphi_3(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [\eta, 2\pi - \eta]\\
&\varphi_4(t) = t\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}-\mathrm{i}\eta}, \qquad t \in [R, 1+\gamma_2(\varepsilon,\eta)] \cup [1-\gamma_1(\varepsilon,\eta), \varepsilon]\\
&\varphi_5(t) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [2\pi - \delta_2(\varepsilon,\eta), \pi + \delta_1(\varepsilon,\eta)]\\
&\varphi_6(t) = \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad t \in [2\pi - \eta, \eta]
\end{aligned}$$

Integrál přes φ_1 konverguje k I. Integrál přes φ_2 vyřešíme LOOPN1 a v limitě nám dá výsledek iAb, kde $b = -\pi$ je úhel, který oběhneme (v limitě) a

$$A = \lim_{z \to 1, \operatorname{Im} z > 0} f(z)(z-1) = \lim_{z \to 1, \operatorname{Im} z > 0} \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)} = \frac{1}{2}.$$

Proto $\int_{\varphi_2} f \to -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}$. Integrál přes φ_3 vyřešíme Jordanovým lemmatem. Máme totiž $\alpha = 0$ a $M_R \sim R^{-\frac{5}{2}}$, tedy $RM_R \sim R^{-\frac{3}{2}} \to 0$ a proto $\int_{\varphi_3} f \to 0$. Díky tomu, že se odmocnina vrátí na reálnou poloosu zespodu s opačnými hodnotami a zároveň integrujeme v opačném směru, tyto dva minusy dají plus a $\int_{\varphi_4} f \to I$. Integrál přes φ_5 vyřešíme opět LOOPN1 a v limitě nám dá výsledek iAb, kde $b = -\pi$ je úhel, který oběhneme (v limitě) a

$$A = \lim_{z \to 1, \operatorname{Im} z < 0} f(z)(z-1) = \lim_{z \to 1, \operatorname{Im} z > 0} \frac{1}{\sqrt{z}(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Proto $\int_{\varphi_5} f \to \frac{\mathrm{i}\pi}{2}$. Nakonec integrál přes φ_6 vyřešíme z definice integrálu a omezenosti funkce $\frac{1}{z^2-1}$ na okolí počátku. Máme tak

$$\left| \int_{\varphi_6} f(z) \,\mathrm{d}z \right| \leq \int_0^{2\pi} C \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \,\mathrm{d}t \to 0.$$

Posčítáním všeho, co jsme zjistili, dostaneme po limitních přechodech

$$I - \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + 0 + I + \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + 0 = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_{-1} f = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{-1}{2\mathrm{i}}\right) = -\pi.$$

Odtud tedy $I = -\frac{\pi}{2}$.