Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje

MICHAL KŘÍŽEK – PAVEL KŘÍŽEK

Matematický ústav a Fyzikální ústav AV ČR, Praha – 1. lékařská fakulta UK, Praha

1. Úvod

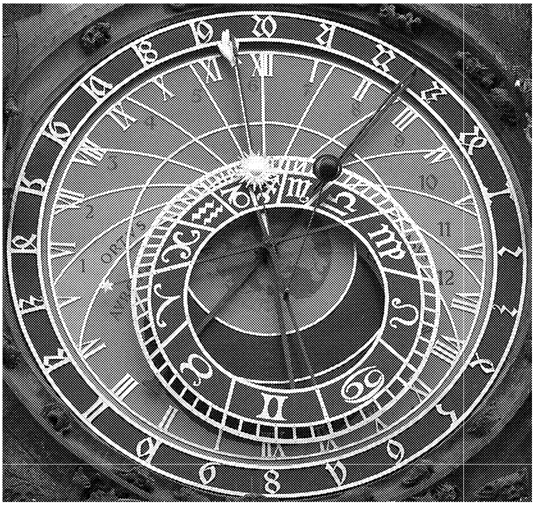
Podle výzkumů *Zdeňka Horského*, *Stanislava Macháčka* a *Emanuela Procházky* [2, s. 32], [3], [6], [8, s. 164] vznikl pražský orloj kolem roku 1410. Tímto pojednáním, které je volným pokračováním článku [5], chceme připomenout 600. výročí jeho vzniku.

Matematický model[1] orloje vytvořil matematik a astronom *Jan Šindel*, který byl r. 1410 rektorem na pražské univerzitě. Při návrhu astronomického ciferníku byla použita již v antice známá stereografická projekce nebeské sféry na rovinu (viz obr. 1). V případě pražského orloje si nebeskou sféru představme jako kulovou plochu o poloměru cca 40 cm. Střed promítání S je umístěn v severním pólu[2] kulové plochy a projekční rovina je k ní tečná s bodem dotyku v jižním pólu J (viz obr. 2). Střed astronomického ciferníku (viz obr. 1) tedy odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry. Nejmenší vnitřní kružnice se středem v jižním pólu znázorňuje obratník Kozoroha

[1] Model popisuje idealizovanou situaci, kdy Slunce a Měsíc obíhají Zemi konstantní úhlovou rychlostí v rovině ekliptiky, směr zemské osy je v prostoru neměnný (tj. nedochází k precesi ani nutacím osy) atp.

[2] Většina orlojů a astrolábů, které vznikly ve druhé polovině 15. století a později, má střed promítání v jižním pólu nebeské sféry, aby bylo možno znázorňovat polohy hvězd v okolí severního pólu. Při tomto způsobu promítání ale sluneční ukazatel vykonává v létě přes den krátké oblouky, zatímco v zimě dlouhé.

na nebeské sféře, zatímco vnější soustředná kružnice obratník Raka.[3] Mezi těmito kružnicemi je na ciferníku ještě umístěna další soustředná kružnice představující rovník nebeské sféry. Na astronomickém ciferníku však vidíme další kružnice a oblouky (srov. [4]), o nichž pojednáme dále.



Obr. 1 Astronomický ciferník pražského orloje (v rovině xy)

V článku [5] je dokázána důležitá vlastnost stereografické projekce:

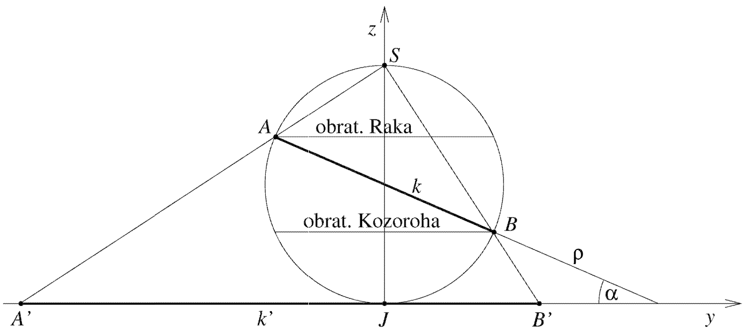
Věta 1 (Ptolemaiova).

Kružnice ležící na kulové ploše a neprocházející středem promítání se při stereografické projekci zobrazí opět jako kružnice.

Díky této větě mohli staří mistři snadno zkonstruovat některé důležité křivky astronomického ciferníku. Je-li sluneční ukazatel v horní modře obarvené oblasti ciferníku, znamená to, že je den. Přechází-li zlacený oblouk označený ORTVS (viz obr. 1), Slunce vychází. Podobně oblouk označený OCCASVS odpovídá západu Slunce. Oba oblouky jsou podle Ptolemaiovy věty částmi jedné kružnice (tzv. *obzorníku*), protože idealizo-

[3] Část nebeské sféry nad obratníkem Raka se vlastně zobrazuje mimo astronomický ciferník.

vaný pražský horizont je na nebeské sféře *hlavní* kružnicí.[4] Připomeňme, že hlavní kružnice je kružnice o stejném středu i poloměru, jako má kulová sféra. Kružnice na kulové sféře, která není hlavní, se nazývá *vedlejší* kružnice. Cihlově zbarvená oblast označená AVRORA odpovídá svítání a CREPVSCVLVM stmívání (soumraku). Černě vybarvená oblast v dolní části ciferníku znázorňuje astronomickou noc, kdy se Slunce nachází alespoň 18° pod horizontem. Podle Ptolemaiovy věty je hranicí této oblasti opět kružnice.



Obr. 2 Stereografická projekce hlavní kružnice k se sklonem α k projekční rovině xy

2. Velikosti šesti kružnic na astronomickém ciferníku

Stereografická projekce je silně nelineární[5] zobrazení. Patrně díky této vlastnosti došlo během několika rekonstrukcí orloje k chybnému určení velikosti některých kružnic na astronomickém ciferníku. Správné polohy středů a velikosti poloměrů 6 základních kružnic (tří hlavních a tří vedlejších) si nyní odvodíme.

Na astronomickém ciferníku zaveďme standardní kartézské souřadnice xy se středem v bodě J. Uvažujme nyní rovinu yz kolmou na vodorovnou osu x. Počátek souřadnic v rovině yz je tedy v bodě $J = (0, 0)$ a nechť

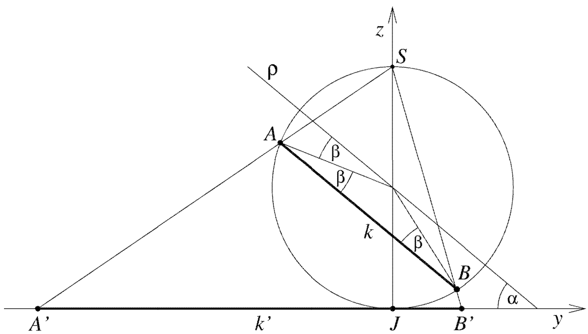
[4] V geocentrickém modelu, který byl v době vzniku orloje jediným oficiálně uznávaným modelem uspořádání světa, je pražský horizont nehybný, zatímco ekliptika se se svými souhvězdími otáčí kolem Země.

[5] Velice malé kružnice v těsné blízkosti severního pólu se totiž zobrazují na nesmírně obrovské kružnice v projekční rovině, zatímco malé kružnice v blízkosti jižního pólu se zobrazují opět na malé kružnice.

$S = (0, 2)$, tj. bez újmy na obecnosti předpokládáme, že kulová plocha má poloměr 1. Podle [5, s. 135] se bod $A = (y, z) \neq S$ na kulové ploše při stereografické projekci zobrazí na bod

$$A' = \Big(\frac{2y}{2-z}, 0\Big). \tag{1}$$

Na kulové sféře nyní uvažujme kružnici k v rovině se sklonem α k projekční rovině xy astronomického ciferníku (viz obr. 2 a 3). Pro jednoduchost se omezíme jen na případ $\alpha \in [0°, 90°)$. Předpokládejme, že osa x je rovnoběžná s rovinou kružnice k. Nechť je tato rovina vzdálena o $|\sin\beta|$ od roviny ρ, která je s ní rovnoběžná a prochází středem koule $(0, 1)$. Je-li k „pod" rovinou ρ, volíme úhel β kladný (viz obr. 3), v opačném případě nekladný.



Obr. 3 Stereografická projekce vedlejší kružnice k se sklonem α

Nechť úhel $\beta \in (-90°, 90°)$ je takový, že $\alpha - \beta \neq 90°$. Označme

$$A = (-\cos(\alpha - \beta), 1 + \sin(\alpha - \beta))$$

nejvzdálenější bod kružnice k od projekční roviny xy (pro $\alpha = 0°$ není jediný) a předpokládejme, že

$$B = (\cos(\alpha + \beta), 1 - \sin(\alpha + \beta)),$$

tj. B je protější bod na kružnici k vzhledem k A a úsečka AB je tedy průměrem k. Podle (1) dostaneme

$$A' = \Big(\frac{-2\cos(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)}, 0\Big) \quad \text{a} \quad B' = \Big(\frac{2\cos(\alpha + \beta)}{1 + \sin(\alpha + \beta)}, 0\Big).$$

Odpovídající kružnice k' v projekční rovině má tedy poloměr

$$r' = \frac{1}{2}|A'B'| = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{1+\sin(\alpha+\beta)} + \frac{\cos(\alpha-\beta)}{1-\sin(\alpha-\beta)}\right|. \tag{2}$$

Střed kružnice k' se nalézá uprostřed úsečky $A'B'$, tj. v bodě $\frac{1}{2}(A'+B')$. Souřadnice středu k' v projekční rovině xy pak jsou $(0, s')$, kde

$$s' = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{1+\sin(\alpha+\beta)} - \frac{\cos(\alpha-\beta)}{1-\sin(\alpha-\beta)}. \tag{3}$$

Rozlišujme tři případy:

1) Rovina kružnice k je rovnoběžná s projekční rovinou. V tomto případě je $\alpha = 0°$. Pak z (2) plyne, že

$$r' = \frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} + \frac{\cos(-\beta)}{1-\sin(-\beta)} = \frac{2\cos\beta}{1+\sin\beta}. \tag{4}$$

Pro nebeský rovník tak dostaneme $r' = 2$ pro $\beta = 0°$, pro obratník Kozoroha odpovídající úhlu $\beta = 23.45°$ je $r' \doteq 1.313$ a pro obratník Raka s $\beta = -23.45°$ je $r' \doteq 3.048$. Podle (3) mají všechny tři kružnice v projekční rovině střed v bodě $(0, 0)$.

2) Kružnice k je hlavní, tj. $\beta = 0$. Pak z (2) plyne, že

$$r' = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha+1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}. \tag{5}$$

Protože Praha leží na 50. rovnoběžce severní šířky, má rovina pražského horizontu sklon $\alpha = 40°$ k projekční rovině xy. Pro obzorník tak dostaneme

$$r' = \frac{2}{\cos 40°} \doteq 2.611 \tag{6}$$

a podle (3) je

$$s' = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(1-\sin\alpha-1-\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{7}$$

Střed obzorníkové kružnice má tedy souřadnice $(0, -2\,\mathrm{tg}\,40°) \doteq (0, -1.678)$. Z její polohy můžete určit, že Slunce v době letního slunovratu vychází kolem 4. hodiny, v době rovnodennosti v 6 hodin a v době zimního slunovratu vychází až kolem 8. hodiny (viz římské číslice na obr. 1).

Poněkud komplikovanější situace nastává s prstencem ekliptiky, protože se v geocentrickém modelu neustále otáčí. Nachází-li se prstenec na ciferníku ve své nejnižší poloze, pak z (5) plyne, že $r' \doteq 2.180$ pro $\alpha = 23.45°$ (srov. obr. 2). Střed prstence obíhá po kružnici o poloměru $2\,\mathrm{tg}\,23.45°$ se středem v počátku J.

O chybě při určování poloměru prstence při rekonstrukci orloje v roce 1865 se pojednává v [5, s. 138]. Tehdy musela být dodatečně přinýtována ke zvířetníku zlacená obruč (srov. obr. 1), aby se ekliptika dotýkala obratníku Raka a Kozoroha.

3) Kružnice k není hlavní ani neleží v rovině rovnoběžné s projekční rovinou. V tomto případě je $\alpha \neq 0° \neq \beta$. Pak z (2) a (3) pro černý kruh odpovídající astronomické noci a úhlům $\alpha = 40°$ a $\beta = 18°$ dostaneme (viz obr. 1 a 3)

$$r' = \frac{\cos 58°}{1 + \sin 58°} + \frac{\cos 22°}{1 - \sin 22°} \doteq 1.769 \tag{8}$$

a

$$s' = \frac{\cos 58°}{1 + \sin 58°} - \frac{\cos 22°}{1 - \sin 22°} \doteq -1.196$$

Poznámka 1. Podle nesprávného nákresu v [7, s. 55] je poloměr obzorníkové kružnice (se sklonem α k projekční rovině) roven $\mathrm{cotg}(\alpha/2) = 2.747$, což je hodnota blízká (6). Funkce $f(\alpha) = 2/\cos\alpha$ odvozená v (5) a $g(\alpha) = \mathrm{cotg}(\alpha/2)$ však mají zcela odlišný průběh. Jejich grafy (pokuste se je nakreslit) se protínají pro $\alpha \doteq 41.221°$, což je blízké hodnotě sklonu obzorníkové kružnice v Praze. Pro jiné zeměpisné šířky $(90° - \alpha)$ se ale hodnoty f a g obecně dosti liší. Autor [7] proto umístil Prahu na 49. rovnoběžku nebeské sféry (místo středu nebeské sféry), aby dosáhl co největší shody s hodnotou $\alpha \doteq 41.221° \doteq 90° - 49°$.

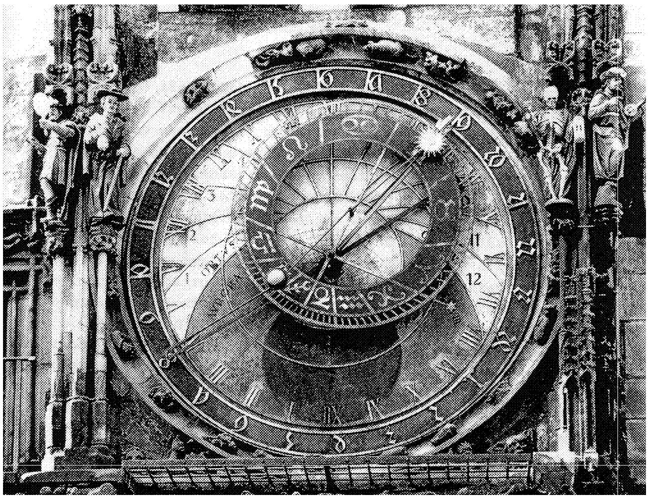
Poznámka 2. Jakub Malina ve své knížce [7, s. 57] dále uvádí: (*Historickou perličkou týkající se desky astrolábu je, že několik desetiletí po poválečné rekonstrukci orloje byla plocha astronomické noci zakreslena nepřesně a napravil ji až zásah Zdeňka Horského a Milana Patky na konci sedmdesátých let minulého století.*[6] Sám Malina [7, s. 55] však chybně in-

[6] Chyba vznikla při poválečné opravě ciferníku, kdy byl nakreslen mnohem menší černý kruh astronomické noci koncentricky s obzorníkem (viz obr. 4). Jižní pól, který je v Praze asi 50° pod obzorem, se na obr. 4 nenachází uvnitř černého kruhu (viz [10]). Až kolem roku 1979 na chybu upozornil Milan Patka.

terpretuje poloměr kruhu astronomické noci jako

$$\frac{1+\cos 40^\circ}{\mathrm{tg}(40^\circ+18^\circ)}+\sin 40^\circ \doteq 1.746.$$

To je opět shodou okolností hodnota velice blízká správné hodnotě uvedené v (8).



Obr. 4 Nesprávně zakreslený černý kruh astronomické noci byl na pražském orloji přibližně 30 let

3. Jsou oblouky planetních hodin části kružnic?

Horský [2, s. 54] o astronomickém ciferníku píše: *Ještě tu je na desce deset zlacených křivek v modré části oblohy nad horizontem, o nichž zatím nevíme, co znamenají. Do jejich sítě patří i obě větve obzorníku i svislice poledníku.*

Zlacené oblouky odpovídají tzv. planetním hodinám.[7] Slunce vychází v nula hodin a den je rozdělen na 12 stejně dlouhých časových úseků, což je na astronomickém ciferníku (viz obr. 1) vyznačeno černými arabskými

[7] Terminologie je značně nejednotná. Někdy se používá též názvu planetární, nestejné, nerovné, přirozené, babylónské, astrologické, temporální či temporární hodiny (viz např. [1], [2], [6], [7]).

číslicemi. Přechází-li sluneční ukazatel zlacený oblouk označený např. číslem 3, pak je třetí planetní hodina. Každé planetní hodině byla kdysi přiřazena nějaká planeta (blíže viz [1, s. 49] a [9, s. 19]). Na 12 stejně dlouhých dílů je rozdělena i noc, což ale na ciferníku není vyznačeno. Pouze v době rovnodennosti je délka planetní hodiny rovna 1 h = 60 minut. V době letního slunovratu trvá 1 planetní hodina přibližně 80 minut a o zimním slunovratu jen asi 40 minut.

Z kapitoly 2 již víme, že obě větve obzorníku jsou části jedné kružnice. Svislice poledníku je úsečka, která je obrazem části hlavní kružnice, jež prochází severním pólem a odpovídá 6. planetní hodině. Nyní si ale ukážeme, že zbývajících deset zlacených oblouků nejsou části kružnic, i když jsou jim velice blízké.[8]

Budeme se zabývat tvarem oblouku, který odpovídá např. 9. planetní hodině (viz obr. 1 vpravo nahoře). Předpokládejme, že se sluneční ukazatel pohybuje po kružnici k se středem v bodě J v projekční rovině (čárky u jednotlivých symbolů budeme pro jednoduchost vynechávat). Nechť poloměr $r \in [r_1, r_2]$ kružnice k leží mezi poloměry obratníku Kozoroha $r_1 = 2\cos\beta/(1+\sin\beta) \doteq 1.313$ a Raka $r_2 = 2\cos\beta/(1-\sin\beta) \doteq 3.048$ pro $\beta = 23.45°$ (viz (4)). Bod $P = (0, r)$ kružnice k odpovídá 6. planetní hodině a nechť $H \in k$ odpovídá 12. planetní hodině, tj. leží zároveň na obzorníkové kružnici o poloměru h a středu $G = (0, -a)$, kde podle (7) je $a = 2\,\mathrm{tg}\,40°$. Označme $\varphi \in [0°, 180°]$ úhel HJP a nechť $D \in k$ odpovídá 9. planetní hodině, tj. úsečka DJ půlí úhel φ.

Bod o souřadnicích $(2, 0)$, který odpovídá západu Slunce při rovnodennosti, leží na kružnici nebeského rovníku a zároveň na kružnici obzorníku. Podle kosinové věty pro trojúhelník GHJ a Pythagorovy věty tedy platí

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos(180° - \varphi) = h^2 = a^2 + 2^2,$$

tj.

$$\cos\varphi = \frac{4 - r^2}{2ar}.$$

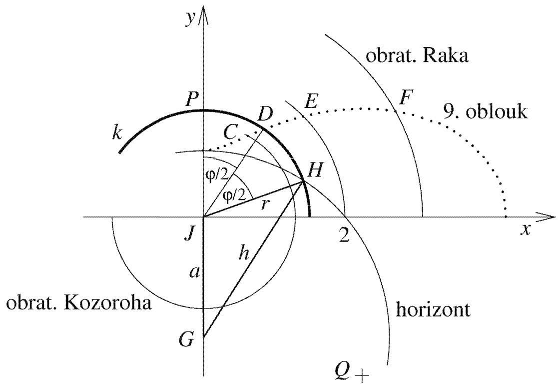
Odtud plyne, že

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{2ar - 4 + r^2}{4ar}}.$$

[8] Viz soutěžní úloha O14, Technický magazín, 1979, s. 69.

Pro bod $D = D(r) = (x, y)$ tak dostáváme

$$x = x(r) = r \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2ar^2 - 4r + r^3}{4a}}, \quad y = y(r) = \sqrt{r^2 - x^2(r)}. \quad (9)$$



Obr. 5 Kružnice pražského horizontu (tzv. obzorník) a 9. oblouk planetních hodin

Věta 2

Křivka $(x(r), y(r))$ definovaná v (9) pro $r \in [r_1, r_2]$ není podmnožinou žádné kružnice.

Důkaz. Na 9. oblouku zvolme průsečíky s obratníkem Kozoroha $C = (c, d) = (x(r_1), y(r_1))$, s nebeským rovníkem $E = (x(2), y(2)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a s obratníkem Raka $F = (f, g) = (x(r_2), y(r_2))$. Těmito třemi body (neležícími v přímce) je jednoznačně určena kružnice, jejíž střed $Q = (q, -q)$ je průsečíkem os úseček CE a EF, kde

$$q = \frac{c + \sqrt{2}}{2} + \frac{d - \sqrt{2}}{2} \frac{(d - g)(g - \sqrt{2}) + (f - c)(\sqrt{2} - f)}{cg - df + \sqrt{2}(d + f - c - g)} = 2.286304\ldots$$

Pomocí Pythagorovy věty se můžete přesvědčit, že vzdálenost středu Q od všech tří bodů C, E, F se rovná $3.801891\ldots$, zatímco vzdálenost Q např. od bodu $D = D(\frac{3}{2}) = (x(\frac{3}{2}), y(\frac{3}{2}))$ je $3.796988\ldots$

Lze ukázat, že $0.998 \le |QD(r)|/|QE| \le 1.003$ pro všechna $r \in [r_1, r_2]$. Odchylka 9. oblouku na tomto intervalu od kruhového oblouku o poloměru

$|QE|$ je tedy nepatrná. Z (9) je možno odvodit, že definiční obor funkce $r \mapsto (x(r), y(r))$ lze rozšířit na interval

$$[r_0, r_3] = [\sqrt{a^2+4} - a, \sqrt{a^2+4} + a] \doteq [0.933, 4.289].$$

Příslušný graf má překvapivě vodorovnou tečnu v bodě $(0, y(r_0))$, kde $y(r_0) = 2(1 - \sin 40^\circ)/\cos 40^\circ$ a od kruhového oblouku se dosti podstatně liší (srov. obr. 5).

Pro ostatní zlacené oblouky lze postupovat analogicky. Kdybychom je prodloužili až ke svislé ose y, budou se všechny protínat v bodě $(0, y(r_0))$, který leží na obzorníkové kružnici, jak plyne ze vztahů (6) a (7).

Poznámka 3. Podoba astronomického ciferníku se mnohokrát dosti podstatně změnila (viz např. obrázky v [1], [2], [9], [11]). Pražský orloj ukazoval po řadu let čas, kterému se někdy také říká babylónský. Slunce vychází v 0 hodin a celý den včetně noci je rozdělen na 24 stejně dlouhých časových úseků. Příslušné hodinové oblouky vzniknou otočením levé větve obzorníku kolem středu o úhly $h \cdot 15^\circ$, kde $h = 1, 2, \ldots, 24$. V tomto případě hodinové oblouky byly částmi kružnic (srov. např. [2, s. 9, 67, 107]).

Poděkování. Autoři děkují Monice Kabelkové a Jakubu a Martinu Šolcovi za inspirující diskuse. Práce byla podpořena grantem č. IAA 100190803.

Literatura

[1] *Gruss, G.*: Z říše hvězd, Bursík & Kohout, Praha 1894–98.

[2] *Horský, Z.*: Pražský orloj, Panorama, Praha 1988.

[3] *Horský, Z. – Procházka, E.*: Pražský orloj, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 9, 1964, p. 83–146.

[4] *Křížek, M. – Somer, L. – Šolcová, A.*: Kouzlo čísel, Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha 2009.

[5] *Křížek, M. – Šolc, J. – Šolcová, A.*: Pražský orloj a stereografická projekce, Matematika-fyzika-informatika 17, 2007/2008, s. 129–139.

[6] *Macháček, S.*: Nález nové zprávy vzniku orloje na Starém Městě v Praze, Čas. Společnosti přátel starožitností, orgán historické vlastivědy české č. 10, Praha 1962, s. 159–161.

[7] *Malina, J.*: Staroměstský orloj, Eminent, Praha 2005.

[8] *Procházka, E.*: Profesor Kadeřávek a staroměstský orloj, sborník konf. Geometrie v technice a umění (ed. K. Drábek), JČSMF, Praha 1985, s. 158–165.

[9] *Rosický, V.*: Staroměstský orloj v Praze, Nakl. J. Otto, Praha 1923.

[10] *Šolc, J.*: Omyl na astronomickém ciferníku pražského orloje. Pokroky MFA, roč. 54, 2009.

[11] *Teige, J.*: Jana Táborského z Klokotské Hory Zpráva o orloji Staroměstském, Spol. přátel starožitností českých v Praze 1901.