

Astronomické omyly provázející pražský orloj

Věnováno Milanu Patkovi k jeho 60. narozeninám.

Michal Křížek¹, Pavel Křížek², Jakub Šolc³

¹Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1; e-mail: krizek@math.cas.cz

²Fyziologický ústav AV ČR, v. v. i., Albertov 2029/5, 128 00 Praha 2; e-mail: krizek1@volny.cz

³Stavební fakulta ČVUT, Tháková 7, 166 29 Praha 6; e-mail: solc@mat.fsv.cvut.cz

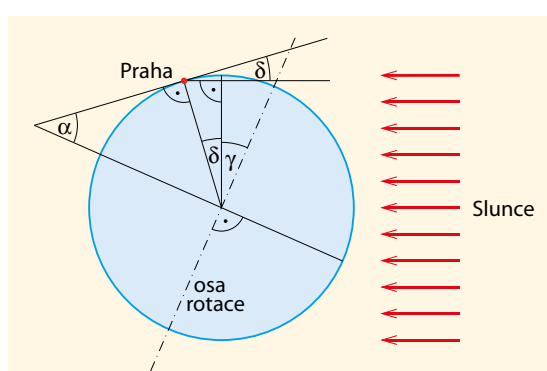
V letošním roce je orloji na Staroměstském náměstí v Praze právě 600 let. Před rokem 1979 byla na jeho astronomickém ciferníku nesprávně zakreslena kruhová oblast astronomické noci. V tomto článku se zmíníme o dalších významných kružnicích, jejichž rozměry a umístění na orloji by se daly ještě zlepšit.

V roce 1979 Milan Patka upozornil na jednu zásadní chybu týkající se astronomického ciferníku pražského orloje. Ve své práci [6] doslova píše: *Chyba spočívá v nesprávném zakreslení křivky astronomické noci, čímž je chybně udávána jak doba samé astronomické noci, tak doba svítání (AVRORA) i soumraku (CREPVSCVLVM), které s nocí souvisí.*

Chyba asi vznikla tak, že při poslední opravě byla zakreslena křivka noci soustředná s křivkou obzoru ORTVS – OCCASVS (viz obr. 1), které soustředné nejsou, což vyplývá z konstrukce planisférického astroλάβu, který je principem orloje. Chyba se nejzřetelněji projevuje ve spodní části ciferníku, kde se křivka noci dotýká u čísla XII obratníku Raka, což je chybné, protože okolo letního slunovratu, kdy Slunce běží po obratníku Raka a v jeho těsné blízkosti, u nás žádná astronomická noc není, ale pouze soumrak a svítání...

Zeměpisné souřadnice pražského orloje jsou

$$50^{\circ}05'13,23'' \text{ s. š. a } 14^{\circ} 25'14,54'' \text{ v. d.} \quad (1)$$



Obr. 2 Osa rotace Země svírá úhel $\gamma = 23,439^{\circ}$ s kolmicí na ekliptiku, tj. na rovinu dráhy Země kolem Slunce. Rovina idealizovaného pražského horizontu odpovídajícího orloji svírá podle (1) s rovinou nebeského rovníku úhel $\alpha = 90^{\circ} - 50,087^{\circ} = 39,913^{\circ}$. V době letního slunovratu o půlnoci je tak v Praze Slunce jen $\delta = \alpha - \gamma = 16,474^{\circ}$ pod obzorem.

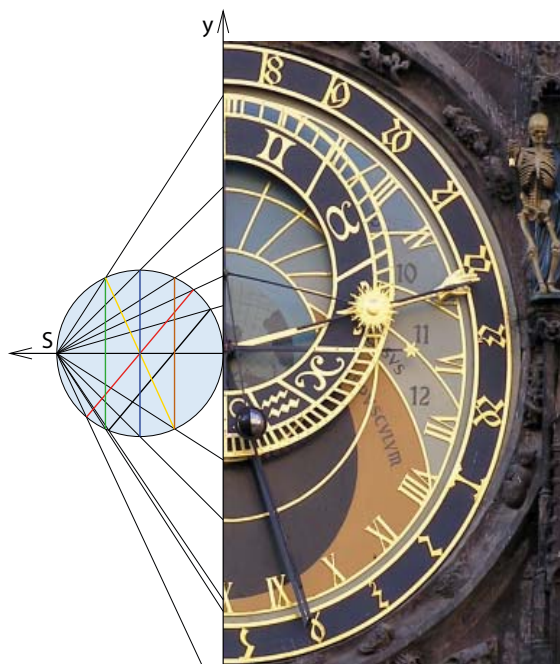


Obr. 1 Podoba astronomického ciferníku pražského orloje v roce 1979.

Je-li Slunce alespoň 18° pod obzorem, říkáme, že je *astronomická noc*. Z obr. 2 a (1) je patrné, že o letním slunovratu je Slunce o půlnoci skutečně méně než 18° pod obzorem, a tedy v Praze astronomická noc kolem letního slunovratu nenastává. Střed astronomického ciferníku odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry, který je v Praze stále přibližně 50° pod obzorem. Na obr. 1 se ale nachází mimo černě vybarvený kruh, jenž má znázorňovat astronomickou noc. Tato skutečnost jen potvrzuje, že oblast astronomické noci byla zakreslena chybně.

Po řadě jednání s Pražským střediskem státní památkové péče a ochrany přírody pak v roce 1979 Milan Patka společně se Zdeňkem Horským zakreslili při rekonstrukci na astronomický ciferník správnou kružnici. Přitom se řídili velikostí nebeského rovníku. Kružnici poté černě vybarvila akademická malířka a restaurátorka Bohumíra Míšová-Čilová (1932–1997), dcera akad. mal. Bohumíra Číly (1895–1973), jenž zhotovil současnou kopii Mánesovy kalendářní desky.

» Při rekonstrukci orloje v roce 1865 vyrobili omylem tehdejší restaurátoři menší prstenec ekliptiky, který se nedotýkal obratníků Raka a Kozoroha. «



Obr. 3 Stereografická projekce šesti základních kružnic nebeské sféry na astronomický ciferník pražského orloje (vlevo bokorys a vpravo půdorys v rovině xy). Střed promítání je v severním pólu S nebeské sféry. Nebeský rovník je nakreslen modře, obratník Raka zeleně, obratník Kozoroha hnědě, ekliptika žlutě, pražský horizont červeně a kružnice astronomické noci černě.

Šest základních kružnic astronomického ciferníku orloje

Na nebeské sféře je následujících 6 základních kružnic: nebeský rovník, obratníky Raka a Kozoroha, ekliptika, horizont a kružnice ohraničující oblast astronomické noci. Stereografická projekce ze severního pólu S nebeské sféry na rovinu tečnou k nebeské sféře v jižním pólu zobrazí podle Ptolemaiovy věty tyto kružnice opět na kružnice (pro důkaz viz [4]). Astronomický ciferník orloje umístíme do projekční roviny xy , srov. obr. 3. Na ciferníku pražského orloje tak najdeme rovněž 6 kružnic,¹ které budeme nazývat stejně jako odpovídající kružnice na nebeské sféře (viz tab. 1). Jejich teoretické velikosti a souřadnice středů jsou podrobně odvozeny např. v [3]. Výsledné vzorce si pouze připomeneme pro případ, že průměr nebeské sféry je 1.

Pomocí vztahu

$$r = \cos \gamma / (1 - \sin \gamma) \quad (2)$$

¹ Zlacené oblouky planetních hodin, označené arabskými čísly 1 až 11, částmi kružnic z matematického hlediska nejsou, i když jsou jim velice blízké, viz [3].

Kružnice	Poloměr	y -souřadnice středu
obratník Raka	1,523	0
nebeský rovník	1	0
obratník Kozoroha	0,656	0
ekliptika	1,090	$\pm 0,434$
horizont (obzorník)	1,304	$-0,837$
hranice astronomické noci	0,884	$-0,596$

Tab. 1 Bezrozměrné velikosti kružnic pro nebeskou sféru o průměru 1. Symbol \pm označuje, že se jedná o celý interval $[-0,434, 0,434]$, protože střed ekliptiky v geocentrickém modelu se pohybuje.

dostaneme poloměr $r_2 = 1$ nebeského rovníku pro $\gamma_2 = 0^\circ$. Poloměr r_1 obratníku Raka odpovídá úhlu $\gamma_1 = 23,439^\circ$, který vyjadřuje sklon ekliptiky k nebeskému rovníku. Podobně r_3 je poloměr obratníku Kozoroha odpovídající $\gamma_3 = -23,439^\circ$. Všechny tři kružnice mají v projekční rovině střed v bodě $(0,0)$ (viz tab. 1). Z (2) okamžitě plyne, že

$$r_1 r_3 = r_2^2, \quad (3)$$

tj. poloměr nebeského rovníku je geometrickým průměrem poloměrů obou obratníků. Protože se ekliptika dotýká obou obratníků, je její poloměr aritmetickým průměrem r_1 a r_3 , tj.

$$r = (r_1 + r_3)/2 = 1/\cos \gamma, \quad (4)$$

kde $\gamma = 23,439^\circ$. Střed ekliptiky obíhá bod $(0, 0)$ po kružnici o poloměru $\tan \gamma$. Poloměr kruhu astronomické noci je dán vztahem (viz [4], [5, s. 286])

$$r = \cos(\alpha + \beta)/(2 + 2 \sin(\alpha + \beta)) + \cos(\alpha - \beta)/(2 - 2 \sin(\alpha - \beta)) \quad (5)$$

a y -souřadnice jeho středu je

$$y = \cos(\alpha + \beta)/(2 + 2 \sin(\alpha + \beta)) - \cos(\alpha - \beta)/(2 - 2 \sin(\alpha - \beta)), \quad (6)$$

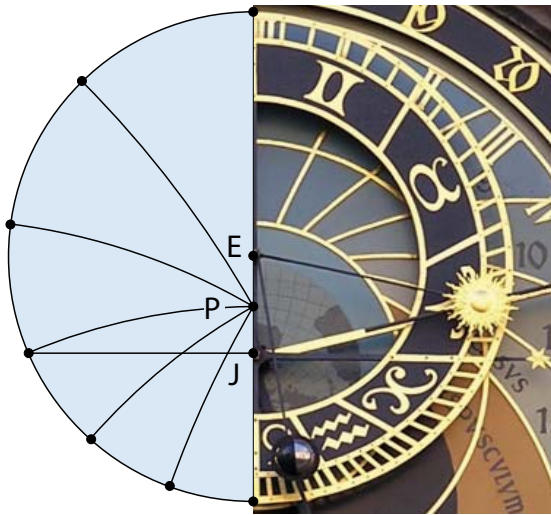
kde $\alpha = 90^\circ - 50,087^\circ = 39,913^\circ$ označuje sklon kružnice pražského horizontu a úhel $\beta = 18^\circ$ odpovídá astronomické noci. Konečně pro horizont (tzv. obzorník) platí stejné vztahy s $\alpha = 39,913^\circ$ a $\beta = 0^\circ$.

Znamení	Teoretický úhel vzhledem k E	Skutečný úhel vzhledem k E	Teoretický úhel vzhledem k J	Skutečný úhel vzhledem k J
Bliženci	44,412°	41,472°	32,181°	30°
Býk	38,257°	38,678°	29,908°	30°
Beran	30,770°	33,289°	27,911°	30°
Ryby	25,051°	26,711°	27,911°	30°
Vodnář	21,560°	21,322°	29,908°	30°
Kozoroh	19,950°	18,528°	32,181°	30°

Tab. 2 Teoretické a skutečné velikosti úhlů zvířetníkových znamení vzhledem ke středu E prstence ekliptiky a středu ciferníku J po směru hodinových ručiček.

Při rekonstrukci orloje v roce 1865 vyrobili omylem tehdejší restaurátoři menší prstenec ekliptiky, který se nedotýkal obratníků Raka a Kozoroha (srov. obr. 3). Na žádost profesorů matematiky Františka Studničky a Karla Hornsteina (viz [7, s. 40]) byla ekliptika náležitě zvětšena. Sluneční a měsíční ukazatel ale dodnes obíhají po nesprávné kružnici (viz obr. 3).

Poznámka. Zvířetníková znamení jsou na prstenci ekliptiky oddělena úsečkami, které směřují do středu ciferníku $J = (0, 0)$. Přitom sousední úsečky svírají úhel 30° (viz obr. 3). To bohužel neodpovídá stereografické projekci. Ekliptika na nebeské sféře je rozdělena na 12 zvířetníkových znamení po 30° . Jednotlivá znamení jsou tak od sebe oddělena 6 hlavními kružnicemi, které jsou kolmé na ekliptiku a všechny procházejí severním a jižním pólem ekliptiky (viz např. [9]). Tyto kružnice se při stereografické projekci zobrazí na 5 kružnic a jednu přímku, které se na obr. 4 protínají ve stereografickém obrazu $P = (0, \sin \gamma / (1 + \cos \gamma))$ jižního pólu ekliptiky a nikoliv v jižním pólu J nebeské sféry (o níž opět předpokládáme, že má průměr 1). V tab. 2 uvádíme velikosti



Obr. 4 Vlevo je stereografická projekce šesti hlavních kružnic procházejících jižním pólem ekliptiky, které oddělují jednotlivá zvířetníková znamení na ekliptice. Vpravo jsou zvířetníková znamení oddělena úsečkami směřujícími do jižního pólu *J* nebeské sféry.

úhlů šesti znamení, jejichž společný vrchol je střed $E = (0, \operatorname{tg} \gamma)$ prstence ekliptiky, resp. střed ciferníku *J*. Např. skutečná hodnota úhlu na orloji odpovídajícího znamení Berana (též Lva) vzhledem k bodu *E* je o více než 8 % větší, než je jeho teoretická hodnota odvozená z vlastností stereografické projekce.

Jednotlivá znamení jsou po obvodu ekliptiky rozdělena na 6 stejně dlouhých dílků. To ovšem také není v souladu se stereografickou projekcí, protože velikosti dílků by se měly plynule měnit. Všimněte si např. náhlého nárůstu délky dílku při přechodu ze znamení Vodnáře do znamení Ryb na obr. 4.

Další nečekané odchylky

V této kapitole upozorníme na několik nepřesností v zakreslení základních kružnic na astronomickém ciferníku pražského orloje. Všechny údaje budeme vztahovat k nebeskému rovníku. Jinými slovy, budeme předpokládat, že ten je zakreslen přesně. Přímým měřením jsme zjistili, že jeho průměr je 165 cm, tj. odpovídající nebeská sféra má poloviční průměr 82,5 cm (srov. obr. 3). Skutečné velikosti všech šesti kružnic na astronomickém ciferníku jsou uvedeny v tab. 3. společně s odpovídajícími teoretickými hodnotami přepočtenými ze vztahů (2)–(6) či tab. 1. Zlacené pruty čtyř nepohyblivých kružnic mají šířku cca 2 cm. Jejich

Kružnice	Průměr: teoretický / skutečný	y-souřadnice středu: teoretická / skutečná
obratník Raka	251,4 / 256,8	0 / 0
nebeský rovník	165 / 165	0 / 0
obratník Kozoroha	108,3 / 104,5	0 / 0
ekliptika	179,9 / 180,2	±35,8 / ±35,5
horizont (obzorník)	215,1 / 223,5	-69 / -75,4
hranice astronomické noci	145,8 / 145,6	-49,2 / -48,1

Tab. 3 Teoreticky odvozené a skutečné velikosti kružnic astronomického ciferníku v centimetrech. Cífy za desetinnou čárkou jsou jen orientační. Odpovídající průměr nebeské sféry je 82,5 cm.

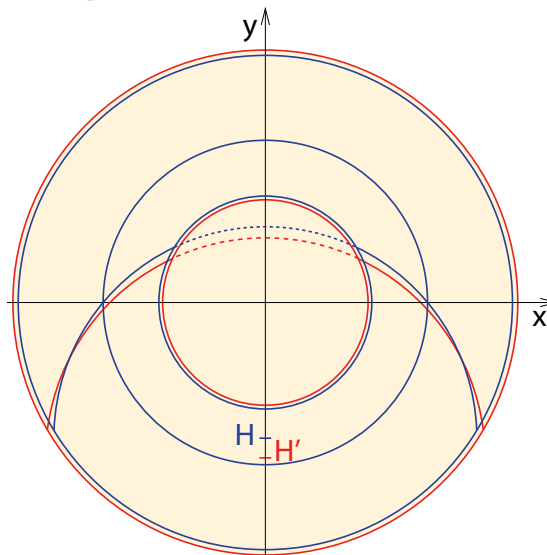
průměry proto uvažujeme vždy ke střední linii prutu. U prstence ekliptiky uvádíme průměr až k jeho okrajům. (Odsazení, tj. vodorovná vzdálenost prstence ekliptiky od astronomického ciferníku je 13 cm.)

Z tab. 3 je patrné, že se dosti liší průměr skutečného horizontu od jeho teoretické velikosti. Přímým měřením jsme zjistili, že vzdálenost průsečíků horizontu a obratníku Raka je

$$b = 222,4 \approx 256,8\sqrt{3/2} \text{ [cm]}. \quad (7)$$

Vzdálenost *b* je tedy paradoxně mnohem větší, než je teoreticky správný průměr horizontu 215,1 cm. Odtud plyne, že je zakreslen chybně. Ciferník byl totiž navržen tak, že *b* je velikost strany rovnostranného trojúhelníka (viz (7)) vepsaného do kružnice obratníku Raka.² To odpovídá situaci, že Slunce vychází o letním slunovratu ve 4 hodiny ráno a zapadá ve 20 hodin. Ve skutečnosti však v Praze o letním slunovratu vychází Slunce již ve 3 hodiny 52 minut a zapadá ve 20 hodin 15 minut

2 Podobně úsečka spojující průsečíky horizontu a obratníku Kozoroha má délku jako strana rovnostranného trojúhelníku vepsaného do kružnice obratníku Kozoroha.



Obr. 5 Červeně jsou označeny nepřesně zakreslené obratníky a horizont na ciferníku pražského orloje. Modře je označena jejich teoreticky správná poloha a nebeský rovník. Střed teoretického, resp. skutečného horizontu je označen *H*, resp. *H'*. Největší chyby zakreslení horizontu jsou v blízkosti obou obratníků.

středoevropského času. Západ Slunce o letním slunovratu se tedy na idealizovaném pražském horizontu liší od situace na idealizovaném pražském horizontu o čtvrt hodiny (viz obr. 5). V tom je zahrnut i rozdíl 138 sekund mezi středoevropským časem a středním slunečním časem, protože Praha neleží na 15. poledníku (viz (1)).

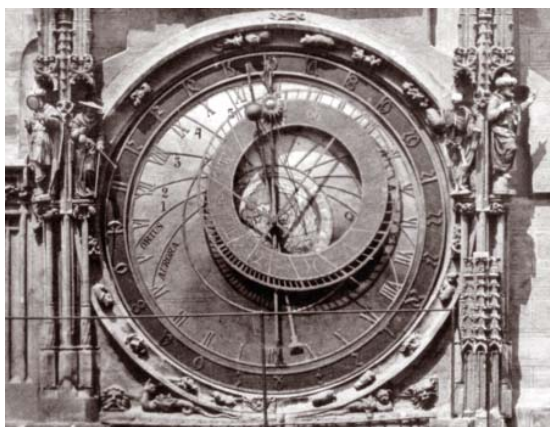
Ke zjištění skutečného průměru *r* horizontu a *y*-souřadnice jeho středu lze využít vztahů (srov. tab. 3 a (7)) $82,5^2 + y^2 = r^2 = 111,2^2 + (256,8/4 + y)^2$.

Výsledné hodnoty *r* a *y* uvedené v tabulce 3 odpovídají zeměpisné šířce 47,58°, jak plyne ze vztahů (5) a (6).

Bystrý pozorovatel si na pravé části obr. 3 dále všimne, že ostrý úhel u průsečíku nebeského rovníku s obzorníkem je o několik stupňů větší než ostrý úhel u průsečíku nebeského rovníku s hranicí astronomické noci. Správně by oba úhly (mezi příslušnými tečnami) měly být rovny sklonu obzorníku $\alpha = 39,913^\circ$, protože se úhly při stereografické projekci zachovávají, viz [5, s. 283] (srov. též levou část obr. 3).

» Západ Slunce o letním slunovratu se tedy na idealizovaném pražském horizontu liší od situace na astronomickém ciferníku o čtvrt hodiny. «

» K chybám v poloze jednotlivých kružnic zřejmě docházelo při pozdějších rekonstrukcích.



Obr. 6 Podoba astronomického ciferníku pražského orloje v roce 1910.

Další odchylka je ve velikosti obratníku Kozoroha. Ze vztahu (3) vidíme, že jeho průměr by měl být $d = 165^2 / 256,8 \approx 106$ [cm], pokud by byl obratník Raka zakreslen správně. Průměr obratníku Raka však neodpovídá sklonu ekliptiky $\gamma = 23,439^\circ$.

Zde je třeba poznamenat, že sklon ekliptiky není konstantní, ale pozvolna kolísá vlivem planetární precese mezi hodnotami $21^\circ 55'$ a $24^\circ 18'$. V současnosti se zmenšuje o $0,47''$ za rok. Před 600 lety, kdy orloj vznikl, tedy mohl být kolem $\gamma = 23,439^\circ + (600 \cdot 0,47/3600)^\circ \approx 23,52^\circ$, to je však stále ještě málo. Obratník Raka tak, jak je zakreslen na ciferníku pražského orloje, totiž odpovídá příliš velkému nerealistickému sklonu ekliptiky

$$\gamma \approx 24,56^\circ, \quad (8)$$

který je řešením rovnice odvozené z (2) a skutečných velikostí z tab. 3, $256,8 = 165 \cos \gamma / (1 - \sin \gamma)$ [cm].

Stávající prstenec ekliptiky, který byl vyroben velice přesně (viz tab. 3), se proto nedotýká obratníku Raka. Schází $(256,8 - 180,2)/2 - 35,5 = 2,8$ [cm]. Prstenec ekliptiky naopak přesahuje obratník Kozoroha o $(180,2 - 104,5)/2 - 35,5 = 2,35$ [cm]. Užijeme-li vztah (2) pro obratník Kozoroha, pak dostaneme ještě větší sklon ekliptiky než v (8), $\gamma \approx 25,31^\circ$, který je řešením rovnice (srov. tab. 3) $104,5 = 165 \cos \gamma / (1 + \sin \gamma)$ [cm].

Nejmenší vzdálenost černého kruhu astronomické noci od obratníku Raka je v současnosti 7,5 cm. Odtud podle tab. 3 mj. plyne, že skutečná y -souřadnice jeho středu je $(145,6 - 256,8)/2 + 7,5 = -48,1$ [cm].

Po poválečné rekonstrukci orloje se však černý kruh dotýkal obratníku Raka (srov. obr. 1), což je ve sporu se situací z obr. 2. Podle tab. 3 by však teoreticky správná vzdálenost měla být jen $(251,4 - 145,8)/2 - 49,2 = 3,6$ [cm].

Rozdíl $7,5 - 3,6 = 3,9$ cm je důsledkem nesprávně zvoleného sklonu ekliptiky (srov. (8)).

Závěrečné poznámky

Nejrůznější omyly provázejí pražský orloj po staletí. Ani Mánesův kalendářní ciferník se nevyhnul omylům. Např. 5. července je u Voldřicha číslice 5 zrcadlově převrácená, po 30. říjnu následuje opět 30. říjen (viz [5, s. 365]).

Před 100 lety byl východ Slunce ORTUS nesprávně zakreslen u oblouku 1. planetní hodiny (viz obr. 6). Podobně u oblouku 11. planetní hodiny byl chybně umístěn nápis OCCASUS označující západ Slunce. Také stínování noci nebylo správné. V době letního slunovratu

je na obr. 6 „hustá tma“ až do III. hodiny ráno, zatímco ve skutečnosti již hodně svítá. Kolem zimního slunovratu zase ukazoval orloj delší svítání a soumrak než kolem letního slunovratu. V roce 1866 byl však kruh astronomické noci umístěn správně (viz [1, s. 47]).

Na Plickových fotografiích orloje před 2. světovou válkou je sice černý kruh astronomické noci větší než na obr. 1, ale nesprávně se dotýká obratníku Raka. Zakreslení astronomické noci na ciferníku pražského orloje má tedy docela spletitou historii.

I když jsou některé kružnice astronomického ciferníku zakresleny dosti nepřesně, je třeba ocenit, že v původním opisu Táborského zprávy [8] od Matouše C. Jablonského z roku 1587 jsou základní kružnice ciferníku pražského orloje (viz např. [2, s. 75]) v naprosto dokonalé shodě s tab. 1. Rovněž ekliptika není dělena po 30° od středu ciferníku, ale úhly jednotlivých znamení odpovídají teoretickým hodnotám z předposledního sloupce tab. 2.

Za to je třeba vyslovit hluboké uznání tehdejšími mistrům. K chybám v poloze jednotlivých kružnic zřejmě docházelo při pozdějších rekonstrukcích. Také je třeba ocenit, že Mikuláš z Kadaně zvolil tak vhodné proporce stroje (ani příliš malé, ani velké), že je orloj po 600 letech ještě v chodu.

Poděkování. Autoři děkují panu Milanu Patkovi a RNDr. Karlu Sandlerovi, DrSc., za inspirující diskusi a současnému orlojníkovu, akad. soch. Petru Skálovi (na obr. 7 u orloje vpravo), za možnost proměření velikostí kružnic pražského orloje. Práce byla podpořena grantem č. IAA 100190803 GA AV ČR.

Literatura

- [1] J. G. Böhm: *Beschreibung der alterhümlichen prager Rathaus-Uhr*. Prag 1866.
- [2] Z. Horský: *Pražský orloj*. Panorama, Praha 1988.
- [3] M. Křížek, P. Křížek: „Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje“, *Matematika-fyzika-informatika* 19, 577 (2010).
- [4] M. Křížek, J. Šolc, A. Šolcová: „Pražský orloj a stereografická projekce“, *Matematika-fyzika-informatika* 17, 129 (2007).
- [5] M. Křížek, J. Šolc, A. Šolcová (red.): „600 let pražského orloje“, *Pokroky mat. fyz. astronom.* 54, 265 (2009).
- [6] M. Patka: *Připomínka ke stavu astronomického ciferníku pražského orloje*. Praha 1979, 3 strany.
- [7] V. Rosický: *Staroměstský orloj v Praze*. Nakl. J. Otto, Praha 1923.
- [8] J. Táborský: *Správa o orlogi Pražském*. 1570 (viz též *Zpráva o orlogi staroměstském*, Josef Teige, Praha 1901).
- [9] <http://mx.ujf.cas.cz/hor/calc/>



Obr. 7 Měření šířky prutu zlatené kružnice obratníku Raka. (Foto: Ivana Macourková)