Stáčení perihelia Merkuru

z pohledu numerického matematika

Michal Křížek

Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1; krizek@math.cas.cz

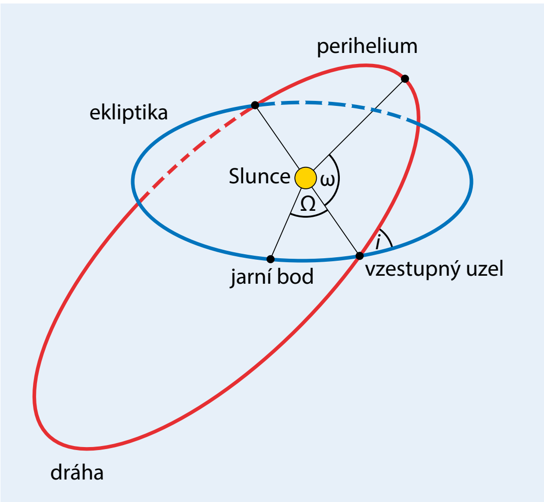
V astronomické a fyzikální komunitě panuje všeobecné přesvědčení, že dodatečné relativistické stáčení perihelia dráhy Merkuru 43″ za století je již dávno a mnohokrát prověřená hodnota, na které není třeba nic měnit. Že je dána rozdílem pozorovaného stáčení perihelia Merkuru a počítaného stáčení pomocí Newtonovy mechaniky. V tomto případě se ale odečítají dvě skoro stejně velká čísla, která jsou navíc zatížena mnoha chybami. Výsledný rozdíl 43″ za století je tak nejistý a nemusí odpovídat skutečnosti.

Stručný historický přehled

Francouzský astronom Urbain Le Verrier (1811–1877) se proslavil zejména předpovědí polohy Neptunu (tehdy neznámé planety). Jeho výpočet byl založen na nepravidelnostech pohybu Uranu [22]. V r. 1859 si Le Verrier také všiml jisté anomálie v poloze perihelia (přísluní) dráhy Merkuru oproti Newtonově teorii [25]. Proto opět hledal další neznámou planetu nazývanou Vulkán[1], jež by měla obíhat ještě blíže Slunci než Merkur. Podle [23, s. 36] se mu nedostávalo 38″ za století, aby jeho výpočet polohy perihelia dráhy Merkuru souhlasil s měřením. V roce 1895 Simon Newcomb [12, kap. IX, s. 184] dochází k podobné zcela nepatrné hodnotě

$$P = 43{,}37'' \text{ za století.}$$

1 Existence takové planety je dnes vyloučena, protože bychom ji museli občas pozorovat při přechodu přes sluneční disk nebo při úplném zatmění Slunce.



Obr. 1 Keplerovské parametry eliptické dráhy planety, které určují orientaci dráhy v prostoru, jsou: inklinace i, délka vzestupného uzlu Ω a argument perihelia ω. S časem se nepatrně mění vlivem dalších planet, precese a nutace zemské osy.

V roce 1915 Albert Einstein publikoval v [5, s. 839] relativistický vztah pro úhel stáčení perihelia za jeden oběh

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)} = 5{,}012\cdot 10^{-7}\ \text{rad}, \quad (1)$$

kde podle soudobých dat je $T = 7{,}6005\cdot 10^6$ s oběžná doba Merkuru, $e = 0{,}2056$ je excentricita jeho eliptické dráhy, $a = 57{,}909\cdot 10^9$ m je délka odpovídající hlavní poloosy a $c = 299\,792\,458$ m/s je rychlost světla ve vakuu. Odtud prostým dosazením vyplývá hodnota stáčení, která je ve výborné shodě s Le Verrierovými a Newcombovými výpočty,

$$E = \varepsilon \frac{\tau}{T}\frac{180}{\pi} 3600'' = 43'' \text{ za století}, \quad (2)$$

kde $\tau = 3\,155\,814\,954$ s je časová délka století.

Zde je ale nutno zdůraznit, že za posledních 100 let se posunulo perihelium Merkuru celkem o cca 5 600″ (viz [4]), z čehož přibližně 5 027″ je způsobeno precesí zemské osy. Jarní bod (viz obr. 1), od nějž se měří rovníková souřadnice rektascenze, se totiž stěhuje po ekliptice[2] průměrně o 50,27″ za rok. Tato hodnota je navíc neustále zkreslována nutací zemské osy o ±9,21″ s periodou 18,6 roku. Úloha přesného stanovení polohy jarního bodu je proto jednou z nejobtížnějších úloh v astronomii. Používat časově závislé rovníkové souřadnice 1. druhu (rektascenzi a deklinaci) pro popis dráhy Merkuru tedy není vhodné.

Proto budeme dále uvažovat pravoúhlou heliocentrickou soustavu, jejíž poloha se vzhledem ke stálicím nemění. V této soustavě je soudobé pozorované stáčení perihelia Merkuru v důsledku gravitačního působení ostatních planet přibližně rovno 575″ za století, což je více než desetinásobek hodnoty uváděné v (2). Podle Le Verrierových výpočtů [25, s. 99] je stáčení perihelia Merkuru ovlivněno dalšími planetami takto:

2 *Ekliptika* je rovina, v níž obíhá Země kolem Slunce. Protože všechny planety mají nenulové inklinace (např. Jupiter 1,3°, Saturn 2,5°), poloha ekliptiky se v prostoru také nepatrně mění s časem gravitačním působením planet. *Jarní bod* je jeden ze dvou průsečíků ekliptiky s nebeským rovníkem.

» Určit, kde přesně se nachází skutečné perihelium Merkuru, je jednou z nej-obtížnějších úloh soudobé astronomie. «

planeta	vliv na stáčení perihelia Merkuru
Venuše	280,6″
Země	83,6″
Mars	2,6″
Jupiter	152,6″
Saturn	7,2″
Uran	0,1″
Celkem	**526,7″**

Tab. 1 Vliv jednotlivých planet na stáčení perihelia Merkuru za století podle [25].

Prostý součet na posledním řádku je třeba chápat jen přibližně, protože se jedná o nelineární úlohu, pro niž takovýto součet není oprávněný. Navíc hodnoty v samotných řádcích jsou zatíženy velkými chybami ve srovnání s (2), i když např. u Jupiteru se uvádějí až na 4 platná místa. V době, kdy Le Verrier prováděl svoje výpočty, totiž nebyly přesně známy hmotnosti planet. Le Verrier [25, s. 19] se kupříkladu domníval, že Merkur má dvakrát větší hmotnost, než je jeho současná, přesně změřená hmotnost pomocí oběžné doby družice Messenger a 3. Keplerova zákona. Hmotnost Země naopak podcenil na pouhých 93,7 % dnes uznávané hodnoty. Proto ani nemohl dostat věrohodné gravitační síly mezi planetami. Přitom neřešil soustavu obyčejných diferenciálních rovnic popisujících problém N těles, ale pomocí své perturbační teorie se omezil jen na součty jistých konečných řad. Nadto měl k dispozici relevantní údaje o polohách planet jen za posledních 50 let.

Hodnoty v tabulce 1 jsou zatíženy i dalšími chybami. Např. Jupiter se na začátku každého století nachází pokaždé jinde, protože 100 let není dělitelné beze zbytku jeho oběžnou dobou 11,861 roku kolem Slunce. Totéž platí i pro další planety, které tak ovlivňují dráhu Merkuru v čase dosti nepravidelně tím, že na něj působí z různých směrů. Pro každé století tak můžeme dostat jinou hodnotu stáčení perihelia (srov. obr. 2 vpravo a též obr. 6).

Ošidný rozdíl dvou skoro stejně velkých čísel

Protože Le Verrierovy a Newcombovy ruční výpočty zdaleka nedosahovaly přesnosti ani jednoduché počítačové aritmetiky (kdy se číslo uchovává v 6 bajtech) a jsou zjevně zatíženy nejrůznějšími chybami, omezíme se dále jen na současný stav. Označme písmenem O pozorovanou (angl. *observed*) hodnotu stáčení perihelia Merkuru za století a písmenem C počítanou (angl. *calculated*) hodnotu tohoto stáčení pomocí Newtonovy mechaniky. V dnešní době se všeobecně tvrdí, že platí rovnost

$$O - C = E, \qquad (3)$$

kde E je Einsteinem předpověděná hodnota (2). Například v [11, s. 457] se píše, že

$$O = 575'' \text{ za stol. a } C = 532'' \text{ za stol.},$$

což podle (3) dává hodnotu (2). Pokud však alespoň jedna veličina ve vztahu (3) není správně stanovena, pak proklamovaná rovnost (3) mnoho nepřináší a hodnota E se může odlišovat od skutečnosti.

Numeričtí matematici dobře vědí (viz [7]), že při odečítání dvou skoro stejně velkých čísel (viz (3)) v konečné počítačové aritmetice s pohyblivou desetinnou čárkou je výsledek zatížen velkou chybou. Při odečítání dvou skoro stejně velkých čísel sice obecně nedochází k zaokrouhlování, ale mantisa rozdílu obsahuje jen málo platných míst, což nutně vede ke ztrátě přesnosti. Uveďme si prostý ilustrační příklad.

Příklad
Předpokládejme pro jednoduchost, že mantisa má jen 5 cifer a počítejme rozdíl $3{,}1416 \cdot 10^0 - 3{,}1415 \cdot 10^0$. Počítač si jako výsledek uloží číslo $1{,}0000 \cdot 10^{-4}$, kde čtyři nuly v mantise nejsou platné cifry. To znamená, že se chyba rozdílu přesune již na druhou cifru v mantise (a to obecně až z poslední cifry ze zadání).

V následujících třech kapitolách ukážeme, že všechny tři hodnoty v (3) jsou zatíženy velkým množstvím rozličných chyb, a tak uváděná rovnost (3) není příliš věrohodná. Poznamenejme ještě, že plný úhel má přes milion obloukových vteřin, neboť

$$u = 360 \cdot 3\,600'' = 1\,296\,000'',$$

zatímco ve vztahu (2) je necelá oblouková vteřina za rok. Vzdálenost perihelia Merkuru od Slunce je $r_1 = a - ae = 46 \cdot 10^6$ km. Podle (2) tak dodatečné stáčení perihelia činí[3]

$$2\pi r_1/u \cdot 0{,}43'' = 96 \text{ km za rok}. \qquad (4)$$

Přitom Merkur se pro srovnání pohybuje rychlostí cca 50 km/s.

Pozorované stáčení perihelia Merkuru

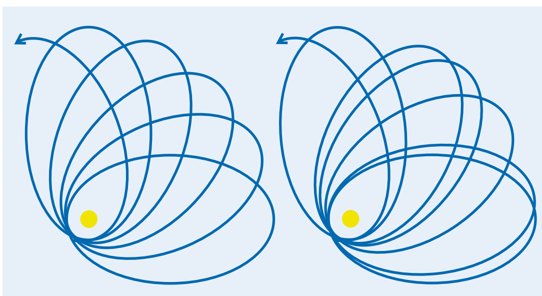
Určit, kde se přesně nachází skutečné perihelium Merkuru, je jedna z nejobtížnějších úloh soudobé astronomie a výpočetní matematiky, a to z mnoha důvodů. V případě malé excentricity $0 < e \ll 1$ jde o špatně podmíněnou úlohu, protože např. pro kruhovou dráhu je perihelium v každém bodě. Excentricita dráhy Merkuru je sice poměrně velká $e = 0{,}2056$, ale protože vedlejší poloosa Merkurovy dráhy má délku

$$b = a\sqrt{1-e^2} = 0{,}98a,$$

je dráha téměř kruhová a Slunce je v jednom z ohnisek.

Merkur lze pozorovat jen několik dní v roce, a to v projekci na přesvětlenou nebeskou sféru. Proto je obtížné ze Země stanovit jeho hodnověrné úhlové vzdálenosti od sousedních hvězd. Většinou se totiž nachází

3 V [10, s. 1048] se chybně tvrdí, že je to 120 km za rok.



Obr. 2 Vlevo je zobrazeno idealizované rovnoměrné stáčení perihelia Merkuru ve směru oběhu. Pro větší názornost je volena vysoká excentricita $e = 0{,}8$. Vpravo je schematicky znázorněno nerovnoměrné stáčení perihelia způsobené ostatními planetami.

v blízkosti horizontu při východu či západu Slunce, kde působí značné potíže tzv. astronomická refrakce atmosféry (viz tabulka 2 převzatá z [6, s. 32]):

zenitová vzdálenost	střední refrakce
0°	0′
20°	0′22″
40°	0′50″
60°	1′43″
70°	2′43″
80°	5′30″
90°	35′

Tab. 2 Vliv zenitové vzdálenosti na střední refrakci atmosféry.

Hodnota refrakce navíc závisí na teplotě vzduchu, jeho tlaku, vlhkosti apod. Všimněme si, že hodnota na posledním řádku tabulky je udána v obloukových minutách, a nikoliv vteřinách (srov. (2)). Je dokonce větší než úhlový průměr Slunce 30′. Když se Slunce při západu dotkne obzoru a my bychom okamžitě odstranili zemskou atmosféru, tak by Slunce bylo již pod obzorem a nastala by tma. Proto se v dnešní době určuje poloha Merkuru na nebeské sféře pomocí družicových měření.

Pro určení okamžité polohy Merkuru v heliocentrických souřadnicích potřebujeme znát přesně nejen jeho časově závislou rektascenzi a deklinaci, ale také vzdálenost[4] od Země, kterou lze v současnosti získat pomocí radarových odrazů [21]. Přitom je třeba však vzít v úvahu, že i Země se pohybuje během měření po dráze, jež není eliptická.

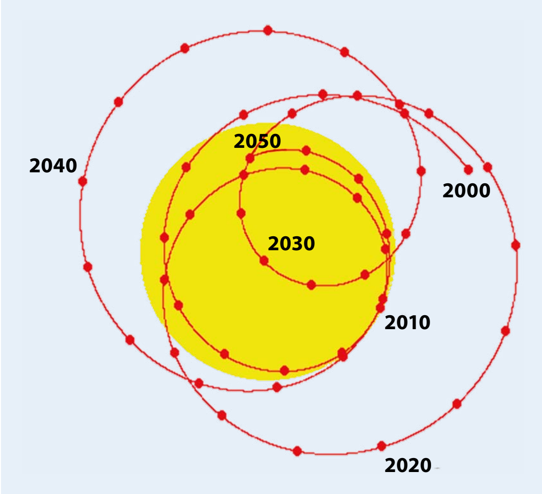
Naměřené polohy Merkuru jen v konečně mnoha časových okamžicích se každopádně musejí dosti složitým způsobem interpolovat a pak přepočítat na heliocentrické souřadnice, v jejichž středu je Slunce a které jsou neměnné vůči vzdáleným nehybným kvasarům.

Zde však nastává další závažný problém, protože skutečná dráha Merkuru není eliptická. Pro ilustraci uvažujme nejprve pouze jednoduchou soustavu Slunce-Jupiter, kde hmotnost Slunce, resp. Jupiteru je

$$M = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg,\ resp.}\ m = 1{,}899 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}.$$

Umístíme-li těžiště této soustavy do počátku kartézských souřadnic, pak ze vztahu $MR = mr$ zjistíme, že vzdálenost Jupiteru, resp. Slunce od počátku je $r = 778 \cdot 10^6$ km, resp. $R = 743\ 000$ km, zatímco poloměr Slunce je 696 000 km, srov. (4). Vidíme tedy, že těžiště této soustavy leží mimo Slunce a Slunce i Jupiter jej obíhají.

4 V době Le Verriera bylo možno stanovit vzdálenost Merkuru jen velice obtížně pomocí Keplerových zákonů a Keplerovy rovnice.

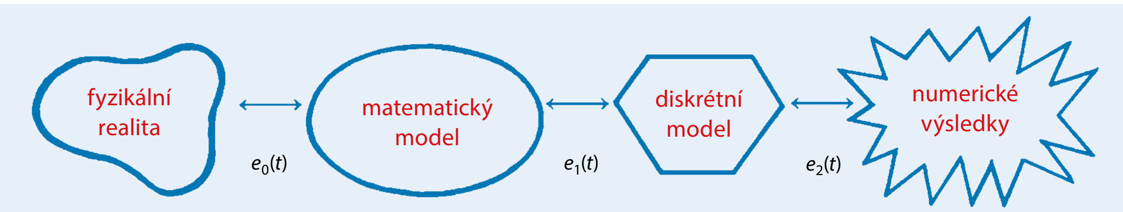


Obr. 3 Projekce dráhy newtonovského těžiště sluneční soustavy do ekliptiky v období 2000–2050. Střed Slunce je v počátku heliocentrické soustavy a jeho průměr je téměř 1,4 milionu km. Těžiště se posune každý den zhruba o 1 000 km, zatímco podle (4) dodatečné relativistické stáčení perihelia Merkuru činí průměrně pouhých 96 km za celý rok.

Slunce však vychylují i ostatní planety (zejména ty vzdálené), a tak heliocentrická soustava není inerciální. Na obr. 3 je znázorněna projekce dráhy newtonovského těžiště sluneční soustavy v heliocentrickém systému za půl století od r. 2000. Skutečná dráha Merkuru proto není elipsa, v jejímž jednom ohnisku je Slunce, ale je to velice komplikovaná prostorová trajektorie (srov. pozn. pod čarou 2), jež je polohou těžiště sluneční soustavy ovlivňována. Není tedy zřejmé, jak přesně definovat např. hlavní poloosu dráhy Merkuru, která by se podle (1) měla stáčet. Také není jasné, jak vůbec stanovit analogii newtonovského těžiště sluneční soustavy pro konečnou rychlost šíření gravitace.

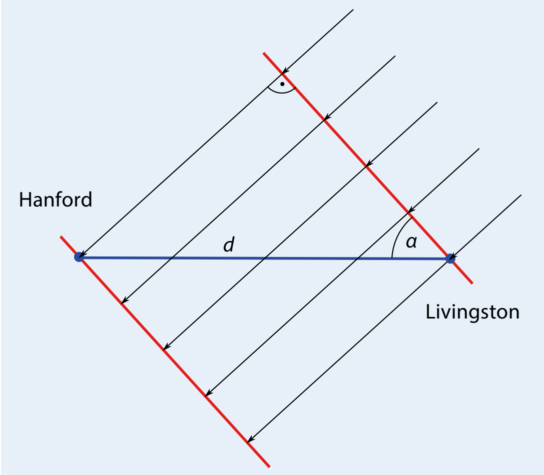
Uveďme další skutečnosti, které je třeba vzít v úvahu pro stanovení skutečné polohy Merkuru. Merkur se pohybuje průměrnou rychlostí kolem 50 km/s. Jeho průměr je téměř 5 000 km a úhlový průměr při přechodu přes sluneční disk je 12″. Než informace o jeho poloze doputuje rychlostí světla na Zemi, posune se o více než 3 své průměry, tj. cca 40″ a 17 000 km (srov. (2) a (4)). Astronomické tabulky však uvádějí souřadnice planet, kde je vidíme, a ne kde se právě nacházejí.

Pro stanovení skutečné polohy Merkuru je třeba vzít v úvahu i aberaci světla, jež pro zemskou dráhu činí ≈ 20″. Je třeba přihlédnout i ke kalibraci přístrojů, což je nezbytné při určování rovníkových souřadnic Merkuru a jeho vzdálenosti od Země. Stanovení skutečné dráhy Merkuru z astronomických pozorování je tedy nesmírně obtížná úloha zatížená množstvím nejrůznějších chyb, což má nemalý vliv na hodnotu O ve vztahu (3).



Obr. 4 Chyba modelu $e_0(t)$ je rozdíl mezi fyzikální realitou a jejím matematickým popisem. Diskrétní konečně rozměrný model se liší od matematického modelu o diskretizační chybu $e_1(t)$. Konečně v $e_2(t)$ jsou zahrnuty zaokrouhlovací chyby, iterační chyby apod.

» Perihelium Merkuru se stáčí dosti nepravidelně. «



Obr. 5 Znázornění průchodu rovinné gravitační vlny dvěma detektory LIGO v USA

Počítané stáčení perihelia Merkuru

Na obr. 4 je obecné schéma výpočetní matematiky pro numerické řešení skutečných (neakademických) problémů matematické fyziky. Vždy se dopouštíme tří základních typů chyb: chyby modelu e_0, diskretizační chyby e_1 a zaokrouhlovacích chyb e_2.

V našem případě je fyzikální realitou sluneční soustava. Její vývoj se většinou modeluje pomocí problému N těles, jež na sebe vzájemně gravitačně působí. Tělesa jsou nahrazena jen idealizovanými hmotnými body, jejichž polohy a rychlosti jsou určeny soustavou diferenciálních rovnic (viz např. [18]) s danými počátečními podmínkami, což představuje uvažovaný matematický model a vzniká tak chyba modelu e_0. Příslušná soustava je nelineární a má mnoho nerealistických řešení, která mj. připouštějí vysoce nadsvětelné rychlosti (např. podle [18] se 5 těles může dostat do ∞ v *konečném čase*). Proto je obtížné odvodit zaručený odhad chyby modelu, který nelze zlepšit. Chyba modelu e_0 se většinou ignoruje, protože na krátkých časových intervalech dává Newtonova mechanika ve sluneční soustavě velice dobrou aproximaci skutečnosti. Chybu modelu e_0 ovlivňuje i předpokládaná nekonečná rychlost šíření gravitační interakce, která je ve skutečnosti jistě konečná. Dva detektory LIGO vzdálené od sebe $d = 3\,002$ km zaznamenaly v r. 2015 průchod gravitační vlny Δt = 6,9 ms po sobě [1, s. 2]. To okamžitě vede na horní odhad rychlosti gravitačních vln

$$c_g = (d \sin \alpha)/\Delta t \leq d/\Delta t = 434\,783 \text{ km/s}$$

ve vakuu nebo v zemském tělese, viz obr. 5.

Pro $N > 2$ nemá obecně problém N těles analytické řešení, a proto se jeho řešení obvykle aproximuje pomocí numerických metod. To vede na tzv. diskrétní konečně rozměrný model, jenž způsobuje další chybu e_1. Problém N těles není stabilní vůči změně počátečních podmínek a trvale působícím poruchám. Každá numerická integrační metoda tak dává nezanedbatelnou diskretizační chybu na dlouhých časových intervalech, i když použijeme dvojnásobnou (8 bajtů) nebo rozšířenou (10 bajtů) aritmetiku.

Konečně chyba e_2 závisí mj. na použitém počítači, programovacím jazyku i na způsobu naprogramování[5]. Numerické chyby se obvykle vzájemně neruší, nýbrž se akumulují a rostou v průběhu výpočtu většinou exponenciálně. Každý výpočtář (ale i pozorovatel) tak může dostat rozdílné výsledky. Např. v Rusku používají pro výpočet efemerid planet [14] zcela jiné programy než ve Francii [3] či v NASA Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, USA, viz [20] a [21].

Rozdíl mezi přesným a přibližným řešením matematického modelu se v numerické matematice odhaduje pomocí apriorních či aposteriorních odhadů chyby. Tento krok je velice důležitý. Pokud neprovedeme spolehlivou analýzu chyby, nevíme vlastně, co jsme spočítali a jak daleko je numerické řešení od řešení přesného.

Spojnice perihelia a afélia (odslunί) se nazývá *přímka apsid*. Jak již bylo řečeno, oběžné doby planet nejsou v poměru malých celých čísel, a proto se stáčí přímka apsid, a tím i perihelium Merkuru dosti nepravidelně. Vyplývá to i z numerických simulací problému N těles.

Například z divokého a dosti chaotického průběhu funkce stáčení přímky apsid na obr. 6 je zřejmé, že pro stanovení hodnoty C nelze dosáhnout přesnosti ani několika obloukových vteřin za století. Proto se v literatuře uvádějí různé odlišné hodnoty (zaokrouhleno na celá čísla), např. $C = 532''$ za stol. (viz [10, s. 1113]), $C = 531''$ za stol. (viz [17, s. 2]), $C = 530''$ za stol. (viz [24, s. 6]), $C = 529''$ za stol. (viz [15, s. 197]). Viz též tabulku 1. Přesto všichni autoři shodně uvádějí Einsteinovu hodnotu (2). Navíc vůbec není zřejmé, jaká je definice stáčení za 100 let. Pokud je tím míněna jakási průměrná hodnota, tak se musí přesně definovat, jak se průměruje. Časový interval na obr. 6 je totiž dlouhý jenom 5 let.

Inklinace Merkurovy dráhy vzhledem k ekliptice je $i = 7°$, a proto se nejedná o rovinný problém (viz obr. 1). Z kapitoly 1 víme, že výpočet poloh planet se provádí v pravoúhlých heliocentrických souřadnicích (X, Y, Z). Pro ilustraci naznačme, jak lze v čase t parametrizovat např. souřadnici X středu Země (se kterou navíc cloumá Měsíc):

$$\begin{aligned} X &= 0{,}0056114 + 0{,}001234\,t \\ &+ 0{,}9998293 \cos(1{,}7534857 + 6283{,}075850\,t) \\ &+ 0{,}000011\,t \cos(2{,}02 + 6283{,}1\,t) \\ &+ \sum_{i=1}^{38} A_i \cos(B_i + C_i\,t) + \sum_{i=39}^{40} A_i t \cos(B_i + C_i\,t), \end{aligned}$$

kde 120 konstant A_i, B_i, C_i je dáno tabulkou uvedenou v [3, s. 313] a t se udává v tisícovkách juliánských let od data J2000.0. Jde tedy o přibližné analytické vyjádření X ve tvaru součtu polynomů s trigonometrickými polynomy, což přispívá k celkové numerické chybě. Podobně se parametrizují i zbylé souřadnice Y, Z a heliocentrické souřadnice dalších planet. Integrační konstanty se vždy po několika letech opravují tak, aby byly v souladu s pozorovanými polohami planet, srov. [2] a [3].

Eliptické dráhy testovacích částic dostaneme jen v poli centrální síly, kdy je gravitační potenciál úměrný $1/r$. Ve sluneční soustavě tomu tak ale není. Např. celková hmotnost meziplanetárního prachu kolem Slunce, který způsobuje zodiakální světlo, se odhaduje na 10^{16} až 10^{17} kg. V práci [16] se připouští jeho zcela nepatrný vliv na stáčení perihelia Merkuru společně s pásem asteroidů, kometami apod. Podle [17] zploštění Slunce přispívá k celkovému stáčení perihelia Merkuru jen 0,0254″ za století. Měli bychom také vzít v úvahu chyby v určení fyzikálních konstant (např. gravitační

5 Pro katastrofální chování zaokrouhlovacích chyb – viz [7, s. 290].

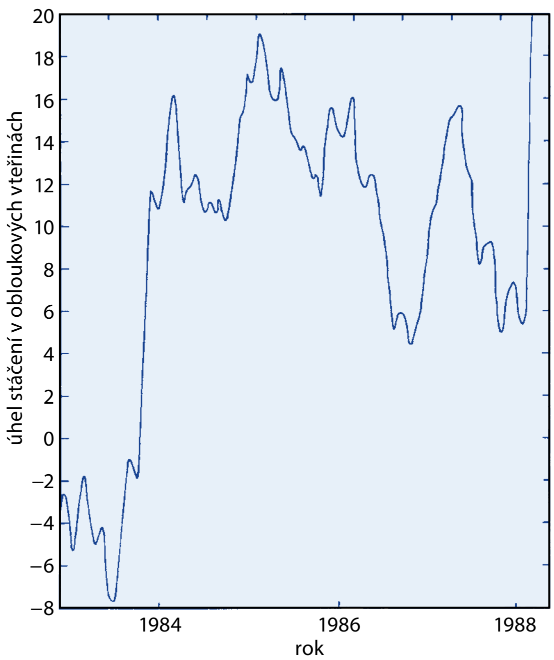
konstanty G, hmotnosti Slunce a planet), vliv magnetických polí, slapové síly, konečnou rychlost šíření gravitační interakce apod. Velké množství drobných chybiček totiž může způsobit nezanedbatelnou celkovou chybu $e_0 + e_1 + e_2$.

Postup Alberta Einsteina

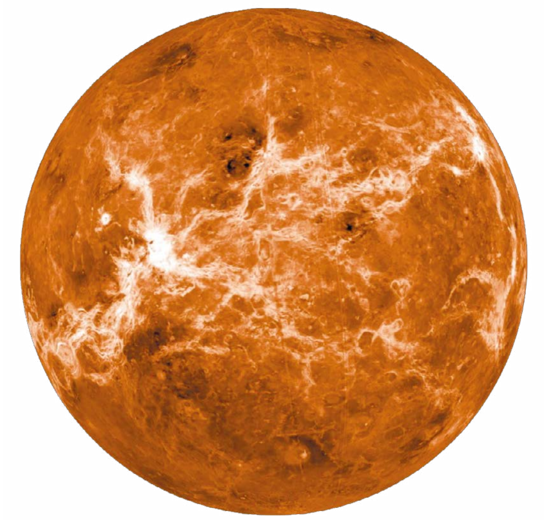
Einsteinovy rovnice pro sluneční soustavu nemohou dávat přesnou hodnotu pozorovaného stáčení perihelia Merkuru O ze vztahu (3), protože každá rovnice matematické fyziky je vždy jen aproximací reality a způsobuje tak nenulovou chybu modelu. Navíc Einstein rozhodně neřešil své rovnice obecné teorie relativity pro sluneční soustavu, což je soustava deseti nelineárních parciálních diferenciáních rovnic. Jejich přesné řešení totiž není známo ani pro 2 stejně hmotná tělesa. Proto Einstein musel učinit celou řadu zjednodušení, aby se vůbec dopracoval k nějaké hodnotě stáčení perihelia Merkuru. Jinými slovy, vztah (2) nebyl odvozen jako důsledek Einsteinových rovnic ve smyslu matematické implikace.

Einstein předpokládal, že zakřivení prostoru v okolí Slunce je dáno časově nezávislou Schwarzschildovou metrikou vně sféricky symetrického objektu [9]. Tzn. že uvažované zakřivení prostoru nezahrnuje gravitační vliv Merkuru, Jupitera a dalších planet (srov. obr. 3). Schwarzschildova metrika je dále nahrazena jen řešením pro tzv. slabá gravitační pole, kde se využívá PPN formalismus (angl. *Parametrized Post-Newtonian Formalism*) pro rychlosti $v \ll c$. Skutečnost, že rychlost Merkuru je podstatně menší než rychlost světla, tak Einsteinovi umožnila provést řadu zjednodušení[6]. Kupříkladu zanedbal členy vyššího řádu při výpočtu Christoffelových symbolů. Po několika stránkách (viz [5, s. 833–837]) dalších aproximací dochází k obyčejné diferenciální rovnici, jejíž řešení vede na eliptický integrál

6 Jejich kritika se uvádí v dopise Karla Schwarzschilda Albertu Einsteinovi ze dne 22. 12. 1915 – viz anglický překlad článku [5].



Obr. 6 Stáčení přímky apsid dráhy Merkuru během pouhých 5 let počítané numericky z problému N těles (upraveno podle [15]).



Planeta Merkur

$$\phi=\left[1+\frac{\alpha}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\right]\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}}, \qquad (5)$$

kde $\phi > 180°$ je úhel mezi rádiusvektorem perihelia a rádiusvektorem následného afélia Merkurovy dráhy, $\alpha_1 = (a(1+e))^{-1}$, $\alpha_2 = (a(1-e))^{-1}$,

$$\alpha = 2GM/c^2 \qquad (6)$$

je Schwarzschildův poloměr Slunce. Protože integrál v (5) nemá známé analytické řešení, Einstein použil lineární část z Taylorova rozvoje

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha x}}=1+\frac{1}{2}\alpha x+\frac{3}{8}\alpha^2x^2+\cdots$$

a funkci ϕ z (5) aproximoval takto

$$\phi\approx\left[1+\frac{\alpha}{2}(\alpha_1+\alpha_2)\right]\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{(1+\alpha x/2)dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}=$$

$$=\pi[1+\frac{3}{4}\alpha(\alpha_1+\alpha_2)]=\pi\left[1+\frac{3\alpha}{2a(1-e^2)}\right].$$

Odtud z (6) a 3. Keplerova[7] zákona $a^3/T^2 = GM/(4\pi^2)$ plyne, že po jedné otočce (přesněji mezi dvěma po sobě jdoucími průchody periheliem) se perihelium posune o úhel

$$\varepsilon=3\pi\frac{\alpha}{a(1-e^2)}=3\pi\frac{2GM}{ac^2(1-e^2)}=24\pi^3\frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)},$$

což je vztah (1), který podle (2) udává idealizovanou relativistickou hodnotu stáčení perihelia Merkuru 43″ za století (srov. obr. 2 vlevo).

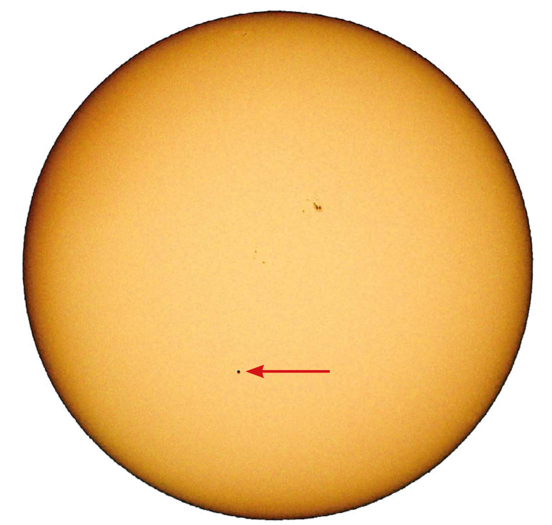
Einstein v [5, s. 839] píše, že astronomové pozorují také dodatečné stáčení perihelia Marsovy dráhy o 9″ za století, zatímco jeho vztah (1) dává jen 1“ za století. Tento enormní nesoulad se bohužel v běžné literatuře zamlčuje. Jinými slovy, neuvádějí se sporné hodnoty pro Mars, ale jen hodnoty pro Merkur, které se hodí.

V řadě publikací (viz např. [13], [17]) se uvádí hodnota (2) dokonce na 4 platná místa 42,98“ za stol., když se dosadí zpřesněné hodnoty a, e a T do jednoduchého vztahu (1). Že byl tento vztah odvozen pomocí mnoha aproximací Einsteinových rovnic, však autoři nekomentují. Jinými slovy, ignorují chyby e_0 a e_1 z obr. 4.

7 Poznamenejme, že všechny tři Keplerovy zákony platí jen přibližně.

» Einstein musel učinit celou řadu zjednodušení, aby se vůbec dopracoval k nějaké hodnotě stáčení perihelia Merkuru. «

» Hodnota relativistického stáčení perihelia Merkuru 43″ za století se týká jen idealizovaného případu. «



Přechod Merkuru přes sluneční disk dne 9. 5. 2016.

Hodnota stáčení perihelia Merkuru (2) tak nemusí odpovídat skutečnosti. Einstein zanedbává též záření Slunce. Samozřejmě nemohl vzít v úvahu i další drobné efekty, které v roce 1915 nebyly známy. Např. počítá pouze s nulovou kosmologickou konstantou $\Lambda = 0$, neuvažuje gravitační aberaci, strhávání prostoročasu rotujícím[8] Sluncem (tzv. Lenseův-Thirringův efekt [8]) apod.

Závěr

V roce 1915 Albert Einstein odvodil hodnotu dodatečného relativistického stáčení perihelia Merkuru 43″ za století. V jeho článku [5, s. 831] se tvrdí, že Le Verrierovi scházelo přibližně 45“ za století k vysvětlení rozdílu mezi pozorovanou a napočítanou polohou perihelia. Tím Einstein způsobil senzaci a jeho obecná teorie relativity se rázem stala slavnou. Hodnota relativistického stáčení (2) se však týká jen idealizovaného případu, který se od skutečnosti dosti odlišuje. Byla získána pomocí mnoha zjednodušení bez zaručených odhadů chyby.

Přitom je velice obtížné oddělit relativistické efekty od podobně velkých efektů Newtonovy mechaniky a mnoha dalších aproximací. Ve vztahu (3) se odečítají dvě skoro stejně velká čísla, která jsou navíc zatížena mnoha chybami. Úloha odhadu rozdílu stáčení perihelia Merkuru získaného z astronomických pozorování a numerickým řešením problému N těles je tak špatně podmíněná [24].

V článku jsme chtěli hlavně upozornit na to, že bychom neměli bez rozmyslu přebírat hodnotu (2) a šířit ji dále, aniž bychom si prověřili, jak se k ní dospělo. Také bychom se měli vyvarovat výroků, že rozdíl pozorovaného a počítaného stáčení perihelia Merkuru podle Newtonovy mechaniky je přesně roven 43″ za století.

Poděkování

Autor děkuje Ing. Antonínu Dvořákovi, Ing. Vladimíru Novotnému, Ing. Janu Vondrákovi, DrSc., dr. h. c., Bc. Janě Žďárské za některé důležité odkazy na literaturu a Hance Bílkové za technickou pomoc. Článek byl podpořen RVO 67985840.

Literatura

[1] B. P. Abbott a kol.: „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger“, Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

[2] P. Bretagnon: „Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP 82“, Astron. Astrophys. **114**, 278–288 (1982).

[3] P. Bretagnon, G. Francou: „Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP 87 solutions“, Astron. Astrophys. **202**, 309–315 (1988).

[4] G. M. Clemence: „The relativity effect in planetary motions“, Rev. Mod. Phys. **19**, 361–364 (1947).

[5] A. Einstein: „Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie“, Königlich-Preußische Akad. Wiss. Berlin, 831–839 (1915), English translation „Explanation of the perihelion motion of Mercury from general relativity theory“ by R. A. Rydin with comments by A. A. Vankov; dostupné z WWW: http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf

[6] J. Kleczek: *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, Praha, 2002.

[7] M. Křížek: „Můžeme věřit numerickým výpočtům?“, Pokroky mat. fyz. astronom. **56**, 290–297 (2011).

[8] J. Lense, H. Thirring: „Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie“, Phys. Z. **19**, 156–163 (1918).

[9] T. Málek, V. Pravda, A. Pravdová: „Einsteinovy rovnice a jejich vybrané důsledky“, Pokroky mat. fyz. astronom. **60**, 203–214 (2015).

[10] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler: *Gravitation*. 20th edition, W. H. Freeman, New York, 1997.

[11] J. V. Narlikar, N. C. Rana: „Newtonian *N*-body calculations of the advance of Mercury's perihelion“, Mon. Not. R. Astron. Soc. **213**, 657–663 (1985).

[12] S. Newcomb: „The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy“, Supp. Am. Ephemeris and Nautical Almanac for 1897, Washington, D. C., Gov. Printing Office, 202 stran, 1895.

[13] A. M. Nobili, C. M. Will: „The real value of Mercury's perihelion advance“, Nature **320**, 39–41 (1986).

[14] E. V. Pitjeva: „High-precision ephemerides of planets – EPM and determination of some astronomical constants“, Solar Sys. Res. **39**, 176–186 (2005).

[15] N. C. Rana: „An investigation of the motions of the node and perihelion of Mercury“, Astron. Astrophys. **181**, 195–202 (1987).

[16] N. T. Roseveare: *Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein*. Clarendon Press, Oxford, 1982.

[17] R. A. Rydin: „Le Verrier's 1859 paper on Mercury, and possible reasons for Mercury's anomalous precession“, dostupné z WWW: http://www.gsjournal.net/old/physics/rydin2.pdf

[18] D. G. Saari, Z. Xia: „Off to infinity in finite time“, Notices Amer. Math. Soc. **42**, 538–546 (1995).

[19] P. K. Seidelmann a kol.: „Report of the IAU/IAG Working Group on cartographic coordinates and rotational elements: 2006“, Celest. Mech. Dyn. Astron. **98**, 155–180 (2007).

[20] E. M. Standish: „An approximation to errors in the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac“, Astron. Astrophys. **417**, 1165–1171 (2004).

[21] E. M. Standish et al.: „JPL planetary and Lunar ephemerides“, DE403/LE403“. JPL IOM 314.10-127, 1–27 (2005).

[22] V. Štefl: „Byl objev Neptunu náhodný?“, Čs. čas. fyz. **65**, 218–226 (2015).

[23] M. F. Tisserand: „Les travaux de Le Verrier“, Annales de l'observatoire de Paris **15**, 23–43 (1880).

[24] A. A. Vankov: „General relativity problem of Mercury's perihelion advance revisited“; dostupné z WWW: ArXiv: 1008.1811v1, 1–46 (2010).

[25] U. J. Le Verrier: „Theorie du mouvement de Mercure“, Annales de l'Observatoire imperial de Paris **5**, 1–196 (1859).

8 Přitom rotační osa Slunce [19] není kolmá na dráhu Merkuru.