OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 1/2020 (49)

O paradoxech ve speciální teorii relativity

Michal Křížek

Abstract [On Paradoxes in the Special Theory of Relativity]: The Special Theory of Relativity predicts several phenomena which, however, can manifest themselves in a different way to an observer due to the finite speed of light, the Doppler effect and aberration of light. In this article we concentrate on the length contraction. For example, we show that under certain conditions a bar on a photograph may seem to have the same length at rest as for a relativistic speed.

Key words: Lorentz transformation, theory of groups, inertial systems, time dilatation, length contraction

Souhrn: Speciální teorie relativity předpovídá několik jevů, které se ale pozorovateli mohou jevit jinak v důsledku konečné rychlosti světla, Dopplerova jevu a aberace světla. V článku se soustředíme na kontrakci délek. Ukážeme například, že za určitých podmínek může mít tyč na fotografii stejnou délku jak v klidu, tak i pro relativistickou rychlost.

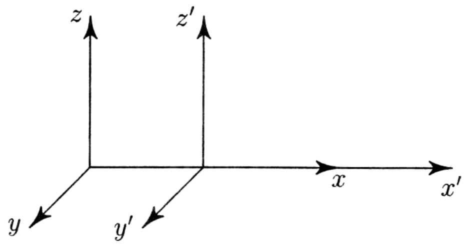
Klíčová slova: Lorentzova transformace, teorie grup, inerciální systémy, dilatace času, kontrakce délek

MESC: M50

Úvod

Podle Newtonova prvního zákona setrvačnosti je těleso v klidu nebo vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb, není-li vnějšími silami nuceno tento stav změnit. Tento fundamentální fyzikální princip slouží k zavedení tzv. inerciálních soustav ve speciální teorii relativity, viz [1]. Uvažujme pevnou souřadnicovou soustavu S s pravoúhlými osami x, y, z, v níž je nehybný systém hypotetických synchronizovaných hodin které definují časovou souřadnici t. Nechť S' je soustava s pravoúhlými osami x', y', z', které jsou pro jednoduchost rovnoběžné s x, y, z. Čas t' v S' se zavádí podobně pomocí nehybného systému synchronizovaných hodin v S'.

Nechť se počátek S' posunuje po ose x konstantní rychlostí $v \in (-c, c)$, kde c je rychlost světla ve vakuu.[1] Soustavy S a S' se tedy navzájem pohybují rovnoměrně a přímočaře a budeme je nazývat *inerciální* (viz obr. 1).



Obrázek 1. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $v \in (-c, c)$ vzhledem k soustavě S

Základem speciální teorie relativity (STR) je Lorentzova transformace [3]. Parametr definovaný vztahem

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \tag{1}$$

nazveme *Lorentzův faktor*. Body z prostoročasu $\mathbb{R}^4$ se nazývají *události*. Pokud nebude řečeno jinak, omezíme se v dalším jen na takovou dvojici výše popsaných inerciálních soustav, kde událost určená střetem počátků soustav S a S' určuje začátek odpočtu času v první i druhé inerciální soustavě, tj. čas $t = 0$ v S a čas $t' = 0$ v S'. V tomto speciálním případě má *Lorentzova transformace* $\mathcal{L}_v$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tvar[2]

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_v(x - vt), && (2) \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma_v\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), && (3) \end{aligned}$$

kde poslední rovnice vyjadřuje, jak se transformuje rovnoměrně plynoucí vlastní čas při přechodu od soustavy S k S'. Tj. čas t' závisí nejen na t ale i na poloze x. Všimněme si, že pravé strany vztahů (2) a (3) jsou pro pevné v lineární funkce v proměnných x a t. Pro $\boldsymbol{x} = (ct, x, y, z)$ a $\boldsymbol{x'} = (ct', x', y', z')$ lze proto Lorentzovu

[1] Skutečnost, že rychlost světla c má stejnou velikost v inerciálních soustavách v okolí Země, byla experimentálně prověřena známými Michelsonovými pokusy [2].

[2] A. Einstein používá transformaci (2)–(3) ve svém stěžejním článku [4, s. 902], ale Lorentzovu práci [3] z roku 1892 necituje a ani Hendrika Lorentze nezmiňuje.

transformaci přepsat do maticového tvaru $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{L}_v\boldsymbol{x}$, kde

$$\boldsymbol{L}_v = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\frac{v}{c}\gamma_v & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

je blokově diagonální, symetrická a pozitivně definitní matice. Fyzikální rozměr všech složek vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x'}$ je tedy metr.

1 Dilatace času

Vztah (3) je třeba chápat tak, že jde pouze o čas, který bychom zaznamenali v okamžiku, kdy se hodiny v soustavách S a S' těsně míjejí jen v jednom jediném bodě (např. v počátku souřadnic). Můžeme tak srovnávat jen časové údaje soumístných hodin, protože pojem současnosti je relativní. Podle definice veškeré hodiny v každé pevné inerciální soustavě ukazují v daném okamžiku stejný čas v celém nekonečném trojrozměrném prostoru (např. na začátku a konci nehybné tyče). Když tedy budeme přesně uprostřed mezi dvěma libovolnými nehybnými hodinami, uvidíme na nich stejný čas.

Pro pevné x' a časový interval $\Delta t = t_2 - t_1$ dostáváme vztah (viz [5, s. 430]), jenž popisuje tzv. *dilataci času*,

$$\Delta t' := t'_2 - t'_1 = \gamma_v(t_2 - t_1) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5}$$

kde t'_i je svázáno s t_i vztahem (3) pro $i = 1, 2$. Z (1) tak dostáváme dilataci $\Delta t' > \Delta t$ pro $v \neq 0$ nezávisle na znaménku v. Vztah (5) vlastně vyjadřuje, že běh času měřený hodinami o pevné souřadnici x' v pohybující se soustavě S', je pomalejší než běh času měřený hodinami, jež jsou vůči S v klidu.

Teoreticky se dilatace času obvykle odůvodňuje takto: Foton vypuštěný z počátku soustavy S ve směru osy y letí v soustavě S' šikmo rychlostí c. Proto z hlediska pozorovatele v S' potřebuje delší dobu k dosažení roviny $y' = y = 1$ než z hlediska pozorovatele v soustavě S.

Experimentální ověření dilatace času se opírá o částice miony, jejichž střední klidová doba života je $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Z pozorovaní kosmického záření víme, že pokud se pohybují přímočaře téměř rychlostí světla, urazí v průměru mnohem delší dráhu než $c\tau = 660$ m. Je třeba ale zdůraznit, že v inerciální soustavě spojené s miony se jejich rozpad nezpomalí. V jiném experimentu [6] se prověřuje dilatace času pomocí příčného Dopplerova jevu.[3] Jako hodiny se používají ionty lithia urychlené na rychlost $v = 0.338c$.

Nerelativistický podélný Dopplerův jev je popsán vztahem $f_v = f_0 c/(c - v)$, kde f_0 je frekvence zdroje v klidu, v je rychlost zdroje blížícího se po ose x k pozorovateli, f_v je pozorovatelem naměřená frekvence a c je rychlost signálu. Tento vztah je třeba opravit pro relativistické rychlosti o dilataci času [1]. Veškeré fyzikální procesy včetně rychlosti chodu hodin v S' totiž budou probíhat v S pomaleji. Nový vztah bude mít tudíž tvar $f_v = f_1 c/(c - v)$, kde $f_1 = \gamma_v^{-1} f_0$ odpovídá nižší frekvenci rekonstruované pomocí vztahu (5). Podle (1) tak dostaneme relativistický Dopplerův vztah pro frekvenci detekovanou v soustavě S,

$$f_v = \frac{1}{1 - v/c} f_1 = \frac{\gamma_v^{-1}}{1 - v/c} f_0 = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 - v/c} f_0 = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f_0. \tag{6}$$

Příklad 1.1
Předpokládejme, že se k pevně umístěnému pozorovateli v soustavě S budou blížit hodiny podél osy x relativistickou rychlostí $v = 0.8c$. Jejich čas půjde pomaleji než na hodinách pevně umístěných v soustavě S, protože podle (5) je $\Delta t' = (1 - 0.64)^{-1/2} \Delta t = \frac{5}{3} \Delta t$. Dosazením $v = 0.8c$ do (6) ale zjistíme, že se letící hodiny budou pozorovateli jevit, že jdou dokonce $3\times$ rychleji než stejné hodiny v soustavě S a $5\times$ rychleji než předpovídá (5). Podle (6) se Dopplerův jev vždy projeví více než samotná dilatace času, kdykoliv se budou hodiny blížit k pozorovateli, protože $\sqrt{(c + v)/(c - v)} > 1$ pro libovolné $v \in (0, c)$. Proto je velice důležité důsledně rozlišovat mezi pojmy rekonstruovat (pomocí Lorentzovy transformace) a pozorovat (naměřit).

Pozorovatel většinou nemá možnost přímo změřit rychlost v nějakého vzdáleného objektu, aby mohl okamžitě použít Lorentzovu transformaci. Může ale změřit frekvenci f_v nějaké charakteristické spektrální čáry určité chemické látky a zjistit odpovídající klidovou frekvenci f_0. Odtud pomocí (6) pak může určit rychlost v (v obecném případě jen radiální složku rychlosti). Při relativistických rychlostech lze tak faktor γ_v^{-1} dobře určit a zjistit, jak významný je hledaný relativistický efekt.

[3] Příčný (transverzální) Dopplerův jev byl poprvé změřen v [7] již v roce 1938. V klasické mechanice tento příčný jev nenastává, neboť je dán pouze dilatací času (5).

2 Lorentzova transformace nepřipouští nadsvětelné rychlosti

Nejprve dokážeme jednoduchou variantu Einsteinova vzorce z práce [4] pro relativistické skládání rychlostí, viz též [8, Chapt. I.6].

Věta 2.1 (Einsteinova)
Nechť $u \in (-c, c)$, resp. $w \in (-c, c)$ je konstantní rychlost bodového objektu v soustavě S, resp. S' ve směru vodorovné osy. Pak

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}}. \tag{7}$$

Důkaz. Rychlosti u, resp. w jsou v S, resp. S' podle předpokladu konstantní. Tedy

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{a} \quad w = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}. \tag{8}$$

Podle (3) je proto

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma_v\Big(1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big) = \gamma_v\Big(1 - \frac{uv}{c^2}\Big),$$

kde rozdíl v závorkách je zřejmě kladný. Z této rovnosti, (8) a (2) máme

$$w = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \gamma_v\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v\Big)\gamma_v^{-1}\Big(1 - \frac{uv}{c^2}\Big)^{-1} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Odtud plyne, že

$$u - v = w - \frac{uvw}{c^2}.$$

Nyní již stačí vyjádřit u a dostaneme (7). □

Vidíme například, že pro $v = w = \frac{2}{3}c$ podle věty 1 je $u = \frac{12}{13}c$ podsvětelná rychlost. V následující větě 2 dokážeme, že ze vztahu (7) nikdy nemůžeme dostat nadsvětelnou ani světelnou rychlost u, i když budou rychlosti v a w libovolně blízko c.

Nejprve připomeňme, že *grupa* G je množina, na které je definována binární asociativní operace $\circ\colon\ G \times G \to G$ s neutrálním prvkem e a v níž ke každému prvku $g \in G$ existuje právě jeden prvek inverzní $g^{-1} \in G$ tak, že $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$.

Operaci skládání $\circ$ dvou Lorentzových transformací $\mathcal{L}_v$ a $\mathcal{L}_w$ určených vztahy (2)–(3) pro podsvětelné rychlosti $v, w \in (-c, c)$ definujeme takto

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_w, \tag{9}$$

kde u je dáno Einsteinovým vzorcem pro skládání rychlostí (7).

Věta 2.2
Lorentzovy transformace $\mathcal{L}_v$ *pro* $v \in (-c, c)$ *definované vztahy* (2)–(3) *tvoří komutativní grupu.*

Důkaz. Je-li $v, w \in (-c, c)$, pak zřejmě platí $\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{w}{c}\right) > 0$ a $\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{w}{c}\right) > 0$. Odtud roznásobením dostaneme, že

$$-\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right) < \frac{v + w}{c} < 1 + \frac{vw}{c^2},$$

a tudíž

$$-c < \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} < c.$$

Porovnáním s Einsteinovým vzorcem (7) vidíme, že $u \in (-c, c)$, tj. u je vždy podsvětelná rychlost.

Podle (1) pro $v = 0$ je $\gamma_0 = 1$ a odpovídající transformace $\mathcal{L}_0$ je identita, tj. neutrální prvek grupy.

Z (7) a (9) okamžitě plyne, že

$$\mathcal{L}_v \circ \mathcal{L}_{-v} = \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{-v} \circ \mathcal{L}_v,$$

tj. transformace $\mathcal{L}_{-v}$ je inverzní[4] k $\mathcal{L}_v$.

Uvažovaná grupa je komutativní, protože speciální blokově diagonální matice $\boldsymbol{L}_v$ a $\boldsymbol{L}_w$ definované vztahem (4) spolu komutují, tj. $\boldsymbol{L}_v \boldsymbol{L}_w = \boldsymbol{L}_w \boldsymbol{L}_v$ pro všechna $v, w \in (-c, c)$. Asociativita grupové operace skládání $\circ$ plyne okamžitě z toho, že násobení matic je asociativní. □

3 Kontrakce délek

Lorentzova kontrakce (neboli zkracování) délek je bezprostředním důsledkem Lorentzovy transformace. Na vodorovné ose x' uvažujme pevnou tyč, která je v soustavě S' v klidu. Označme délku tyče symbolem

$$\ell_0 = x'_2 - x'_1, \tag{10}$$

kde x'_i jsou pevné časově nezávislé souřadnice konců tyče v soustavě S'. V soustavě S položíme

$$\ell = x_2(t) - x_1(t),$$

[4]Vzhledem k rovnocennosti soustav S a S' vypadá inverzní Lorentzova transformace podobně jako ve vztazích (2) a (3). Je ale třeba změnit znaménko $-$ na $+$, tj. $x = \gamma_v(x' + vt')$ a $t = \gamma_v(t' + vx'/c^2)$.

kde souřadnice konců tyče závisí na čase t. Ze vztahu (2) máme

$$x_2' = \gamma_v(x_2(t) - vt), \qquad x_1' = \gamma_v(x_1(t) - vt).$$

Odtud po dosazení do (10) dostáváme, že

$$\ell_0 = \gamma_v(x_2(t) - vt - x_1(t) + vt) = \gamma_v \ell$$

a podle (1) platí

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{11}$$

Již v roce 1959 Roger Penrose publikoval článek [9], v němž popisuje, proč bychom měli vidět rychle letící nerotující kouli na fotografii opět jako kouli. Jeho myšlenky ve stejném roce podrobněji rozpracoval James Terrell [10] pomocí aberace světla. Nyní si uvedeme konkrétní příklad inspirovaný Terrellem.

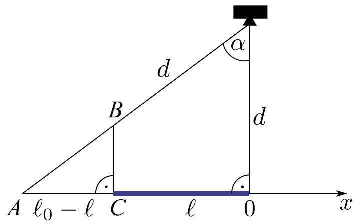
Příklad 3.1
Uvažujme tyč o délce $\ell_0 = 1$ m. Předpokládejme, že se pohybuje zleva doprava podél osy x soustavy S konstantní rychlostí $v = 0.8c$ a její přední konec právě dosáhl počátku. Podle (11) je tyč zkrácena na $\ell = 0.6$ m, a tedy úsečka AC na obr. 2 má délku $|AC| = 0.4$ m. Tyč budeme fotografovat z osy y ze vzdálenosti

$$d = \ell_0 \sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1} = 0.75 \text{ m} \tag{12}$$

od počátku z pevně umístěného nerotujícího fotoaparátu. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků z obr. 2 tak platí $|BC| = |AC|d/\ell_0 = 0.3$ m. Odtud plyne, že $|AB| = \sqrt{0.4^2 + 0.3^2} = 0.5$ m. Úsek na přeponě od bodu B k fotoaparátu má v metrech stejnou délku jako d v (12),

$$\sqrt{1^2 + 0.75^2} - |AB| = 1.25 - 0.5 = d.$$

Aby nebyly snímky rozmazané, budeme předpokládat, že náš idealizovaný fotoaparát umí dělat snímky (s vysokou kadencí) během 1 pikosekundy. Za tu dobu uletí světlo pouhé 0.3 mm a rozmazání na fotografii tak nebude hrát významnou roli. Pro jednoduchost budeme analyzovat jen tu fotografii, na níž přední konec tyče právě dosáhl počátku souřadnic S. Zadní konec tyče ale bude na fotografii dále než ℓ, protože světlo z předního konce letí po kratší dráze d než světlo z jejího zadního konce (viz obr. 2). Proto budou na fotografii zaznamenány fotony ze zadního konce tyče, které byly vyslány dříve než ty z předního konce (viz obr. 2). Za dobu, kdy se zadní konec tyče přesune z bodu A do bodu C, urazí foton směřující z bodu A do fotoaparátu vzdálenost $|AB|$, protože $v/c = |AC|/|AB| = 0.8$.



Obrázek 2. Délka odvěsen většího (resp. menšího) pravoúhlého trojúhelníka je 1 a 0.75 (resp. 0.4 a 0.3) metru. Poměr délek stran u obou trojúhelníků je tak $5:4:3$. V důsledku světelné aberace má tyč letící zleva doprava rychlostí $0.8c$ na fotografii stejnou délku, jako má stejná tyč v klidu. Rysky na tyči po deseti centimetrech ale budou mít na fotografii nestejné vzdálenosti.

Dále ukážeme, že pohybující se tyč bude mít na fotografii opět délku 1 metr pro situaci z obr. 2. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami d a ℓ_0. Pak pro poměr vodorovné odvěsny ku přeponě podle (12) platí

$$\frac{\ell_0}{\sqrt{d^2+\ell_0^2}} = \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2(c^2/v^2-1)+\ell_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2/v^2}} = \frac{v}{c} = 0.8. \qquad (13)$$

Letící tyč tedy vyfotografujeme pod úhlem $\alpha = \arcsin 0.8$, který je stejně velký (srov. (13)), jako kdybychom vyfotografovali nehybnou metrovou tyč dotýkající se předním koncem počátku soustavy S. Díky aberaci světla tak pohybující se tyč bude mít na fotografii stejnou délku jako nehybná metrová tyč.

Poznamenejme ještě, že foton uletí vzdálenost d z počátku souřadnic k fotoaparátu za čas $\Delta t = d/c$. Za tu dobu se tyč posune o $v\Delta t = 0.8d = 0.6$ m, tj. bude se celá nacházet vpravo od bodu 0.

Příklad 3.2

Nechť opět $\ell_0 = 1$ m a $v = 0.8c$. Tedy $\ell = 0.6$ m. Tentokrát ale umístíme fotoaparát blíže k ose x, tj. $d < 0.75$ m. Budeme opět analyzovat ten snímek, kde je pravý konec tyče v počátku. Levý konec tyče se z bodu $A = (-a, 0)$ posune do bodu $(-\ell, 0)$ za čas $\Delta t = (a-\ell)/v$. Za tu dobu urazí foton z bodu A směrem k fotoaparátu vzdálenost $c\Delta t$. Ze vztahu $a^2 + d^2 = ((a-\ell)c/v + d)^2$ lze odvodit, že

$$d = \frac{a^2(v/c - c/v) + 2a\ell c/v - \ell^2 c/v}{2(a-\ell)}.$$

Například pro $a = 2$ m vychází $d = \frac{15}{56} = 0.26\ldots$ m. Umístíme-li tedy fotoaparát ose y do vzdálenosti 26 cm od počátku, bude se metrová letící tyč jevit na fotografii dokonce jako dvoumetrová. Hlavním důvodem tohoto překvapivého jevu je, že fotony, které současně prošly objektivem, nebyly emitovány současně.

Pro $d > 0.75$ m uvidíme na fotografii tyč kratší než 1 metr. Stejná tyč bude rovněž kratší než ℓ, pokud ji zachytíme tak, že její levý konec bude v počátku. Jestliže bude umístěna přesně symetricky vzhledem k počátku, bude mít na fotografii délku právě ℓ. V článku [11] se popisuje, jak se bude jevit na fotografii rychle letící krychle.

4 Pár slov na závěr

STR vykazuje řadu nečekaných tvrzení, která se příčí naší intuici. Podle STR nelze žádným pokusem zjistit, zda je těleso v klidu či se pohybuje. Všechny inerciální soustavy pro popis fyzikálních jevů jsou ekvivalentní a neexistuje žádná preferovaná soustava. V současnosti však víme, že reliktní mikrovlnné záření (CMB) vlastně určuje jakousi nehybnou a pevnou referenční soustavu v našem okolí. Vznikají tak spekulace, jak je to vlastně principem relativity ve skutečném vesmíru.

V limitním případě $w = \pm c$ dává Einsteinův vzorec (7) pro $v \in (-c, c)$ rychlost $u = c$. Foton tak má v jakékoliv inerciální soustavě vždy rychlost světla.

Často se traduje, že Lorentzova transformace pro malé rychlosti $|v| \ll c$ přechází na Galileovu transformaci $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$. To ale není pravda (viz [12]), protože z (3) nedostaneme, že $t' = t$ pro žádné nenulové v. Naopak pro libovolně malé pevné $v > 0$ vždy můžeme najít x takové, že člen vx/c^2 bude výrazně dominovat nad t. Z (2)–(3) ale plyne, že Lorentzova transformace přechází na Galileovu pro pevné v, když budeme c chápat jako parametr a předpokládat, že $c \to \infty$.

Vztahy (2)–(3) představují transformaci objektivních lokálně určených prostoročasových souřadnic bodů z jedné inerciální soustavy do objektivních prostoročasových souřadnic druhé inerciální soustavy. Relativistické vizuální efekty kromě transformačních vztahů (2)–(3) ale vyžadují zohlednit aberaci světla a Dopplerův jev, které přinášejí několik dalších efektů kromě těch již zmíněných. Na stránkách `www.spacetimetravel.org` je k této problematice volně dostupná řada počítačových animací.

Literatura – References

[1] Foster, J., Nightingale, J. D.: *A short course in general relativity (3rd edition)*. Springer, New York, 2006.

[2] Michelson, A. A., Morley, E. W.: *On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether*. Amer. J. Sci. 34 (1887), 333 – 345.

[3] Lorentz, H. A.: *La théorie électromagnetique de Maxwell et son application aux corps mouvants*. Arch. Néerl. 25 (1892), 1 – 190.

[4] Einstein, A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. der Phys. 322 (10) (1905), 891 – 921.

[5] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika*. sv. 2, SNTL, Praha, 1976.
[6] Botermann, B., et al.: *Test of time dilatation using stored Li+ ions as clocks at relativistic speed*. Phys. Rev. Lett. 113 (2014), 120405; errata 114 (2015), 239902.
[7] Ives, H. E., Stilwell, G. R.: *An experimental study of the rate of a moving atomic clock*. J. Optic. Soc. Amer. 28 (1938), 215 – 226.
[8] Pauli, W.: *Theory of relativity*. Dover Publ., Inc., New York, 1981.
[9] Penrose, R.: *The apparent shape of a relativistically moving sphere*. Proc. Cambridge Phil. Soc. 55 (1959), 137 – 139.
[10] Terrell, J.: *Invisibility of Lorentz contraction*. Phys. Rev. 116 (1959), 1041 – 1045.
[11] Weisskopf, V. F.: *The visual appearance of rapidly moving objects*. Physics Today 13(9) (1960), 24 – 27.
[12] Baierlein, R.: *Two myths about special relativity*. Amer. J. Phys. 74 (2006), 193 – 195.

Poděkování: Autor děkuje Filipu Křížkovi a neznámému recenzentovi za inspiraci a velmi cenné připomínky. Článek byl podpořen RVO 67985840.

Adresa autora:

Matematický ústav AV ČR, Žitná 25,
115 67 Praha 1
e-mail: `krizek@math.cas.cz`