OBZORY MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY 2/2021 (50)

O paradoxu dvojčat

Michal Křížek

Abstract [On the twin paradox]: First we present several illustrative examples of the classical twin paradox, since there are still many doubts and conjectures about it. Further, we show that time in a gravitational field on the surface of a spherically symmetric mass body flows as quickly as the proper time of a clock moving by the corresponding second cosmic speed.

Key words: Lorentz transformation, inertial systems, time dilatation, relativistic Doppler effect.

Souhrn: Nejprve představíme několik ilustrativních příkladů klasického paradoxu dvojčat, protože o něm koluje stále mnoho pochybností a nejasností. Dále ukážeme, že čas v gravitačním poli na povrchu hmotného sféricky symetrického tělesa plyne stejně rychle jako vlastní čas hodin pohybujících se příslušnou 2. kosmickou rychlostí rychlostí.

Klíčová slova: Lorentzova transformace, inerciální soustava, dilatace času, relativistický Dopplerůr jev.

MESC: M50

1 Úvod

Toto pojednání je volným pokračováním článku [4], kde jsme se snažili upozornit na některé paradoxní jevy způsobené Dopplerovým jevem, které souvisí s kontrakcí délek a dilatací času ve speciální teorii relativity. Nyní se ještě zaměříme na známý paradox dvojčat. Nejprve si ale ve stručnosti připomeňme, že pohyby těles v inerciální soustavě S musí splňovat první Newtonův zákon setrvačnosti. V S zavedeme pravoúhlé souřadnice x, y, z a definujeme rovnoměrně plynoucí časovou souřadnici $t \in (-\infty, \infty)$. Tj. ve všech bodech prostoru máme hypotetické hodiny ukazující v daném okamžiku stejný čas.

Nechť S' je další inerciální soustava s pravoúhlými souřadnicemi x', y', z', které jsou pro jednoduchost rovnoběžné s osami x, y, z (viz obr. 1) a v klidu mají všechny osy stejné měřítko [14]. Čas $t' \in (-\infty, \infty)$ v S' se opět zavádí pomocí soustavy synchronizovaných hodin, jež jsou vůči S' v klidu. Pro jednoduchost předpokládejme, že počátek S' se pohybuje podél osy x konstantní rychlostí $v \in (-c, c)$, přitom pro

$v > 0$ se bude pohybovat v kladném směru osy x a pro $v < 0$ v záporném směru osy x. Zde c je rychlost světla ve vakuu, která je stejná ve všech inerciálních soustavách. Dále definujme *Lorentzův faktor* známým vztahem

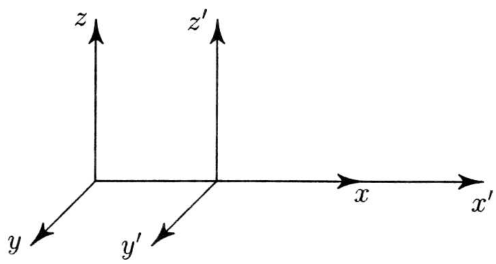
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1. \tag{1}$$

Všimněme si, že $(v/c)^2 + (1/\gamma)^2 = 1$ splňuje rovnici jednotkové kružnice.

Body prostoročasu R^4 nazveme *události*. Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy událost odpovídající střetu počátků S a S' definuje počátek odpočtu času v obou soustavách, tj. $t = 0$ v S a $t' = 0$ v S'. V tomto speciálním případě má *Lorentzova transformace* tvar

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{2}$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = \gamma\Big(t - \frac{v}{c^2}x\Big), \tag{3}$$

kde $x, y, z, t \in (-\infty, \infty)$.



Obrázek 1. Inerciální soustava S' se pohybuje rychlostí $v \in (-c, c)$ vzhledem k nehybné soustavě S.

Uvažujme pevný časový interval

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 > 0,$$

kde t'_i jsou prostorově nezávislé časové souřadnice v S'. Pro libovolný pevný bod x na ose x v S definujme odpovídající časy t_2 a t_1 pomocí vztahu (3),

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x), \qquad t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x)$$

a položíme $\Delta t = t_2 - t_1$. Odtud pak plyne známý vztah pro *dilataci času* [2],

$$\Delta t' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x - t_1 + \frac{v}{c^2}x) = \gamma \Delta t. \tag{4}$$

Z (1) je patrno, že platí $\Delta t' > \Delta t$ pro každé $v \neq 0$ nezávisle na znaménku v. Vztah (4) vlastně vyjadřuje, že vlastní čas hodin v pohybující se soustavě S' plyne pomaleji než čas na hodinách, které jsou v klidu vzhledem k S. Hodiny v klidu tedy tikají nejrychleji.

2 Paradox dvojčat

V řadě publikací [3], [5, p. 167], [6], [13]... se paradox dvojčat (angl. též the clock paradox) formuluje pomocí dilatace času takto:

Jedno dvojče Adam zůstane na Zemi, zatímco druhé dvojče Bob poletí konstantní relativistickou rychlostí v ke hvězdě Siriu vzdálené 8 ly (světelných let, angl. light year). Podle Adama bude Bobův čas plynout pomaleji v důsledku dilatace času a také Bobova vzdálenost k Siriu bude kratší než 8 ly díky kontrakci délek. Po otočce u Siria Bob změní inerciální soustavu a vrátí se rychlostí $(-v)$. Po návratu na Zemi dvojčata zjistí, že Adam je starší než jeho bratr Bob. Podívejme se nyní na paradox dvojčat podrobněji.

Paradox dvojčat je vlastně paradoxem relativnosti současnosti. Nejprve stručně rozebereme několik nesprávných řešení paradoxu dvojčat, která kolují v laické veřejnosti nebo je lze najít na internetu.[1] Často se například tvrdí, že Bob se vrátí stejně starý jako Adam. Bobovi se totiž jeví, že on sám je v klidu a že se naopak Adam pohybuje, a tak Adamovi plyne čas pomaleji v důsledku dilatace času (4). Tato symetrie platí pro všechny inerciální soustavy. Musíme si ale uvědomit, že Bob u Siria změnil inerciální soustavu, a tak úloha není symetrická vzhledem k oběma dvojčatům. Proto předchozí tvrzení není správné.

Jiné nesprávné řešení poukazuje na to, že Adam pozoruje nejprve červený posuv vzdalujícího se Boba v důsledku Dopplerova jevu [1], tj. Adamovi se jeví, že Bobovy hodiny jdou pomaleji. Po Bobově otočce u Siria bude Adam pozorovat modrý posuv. Oba jevy se tak vykompenzují a oba bratři se opět setkají stejně staří. V následující kapitole uvidíme, že ani toto zdůvodnění není správné, protože je třeba vzít v úvahu dilataci času (4). Podrobný rozbor Dopplerova jevu ve speciální teorii relativity uvádíme v [4] (viz též [7]).

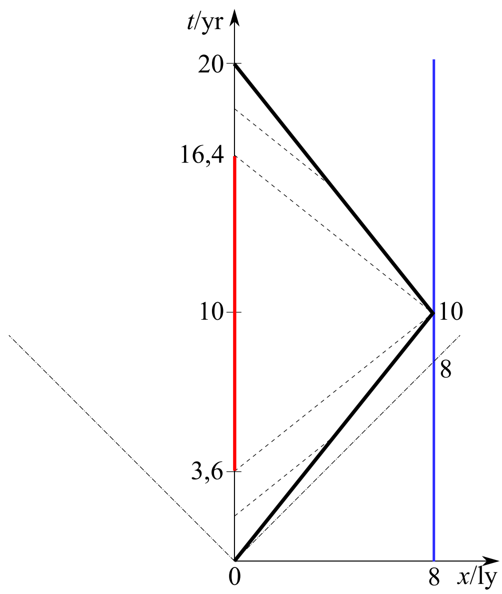
---

[1] `https://fikacek.blog.idnes.cz/blog.aspx?c=454179`, `www.wikina.cz/a/Paradox_dvojčat`

Uveďme si ještě třetí nesprávné řešení. Abychom byli konkrétní, předpokládejme, že

$$v = 0,8c$$

je rychlost inerciální soustavy Boba S' ve směru osy x vzhledem k nehybné soustavě Adama S. Pro jednoduchost budeme měřit čas v rocích a vzdálenosti ve světelných rocích. Pak bude rychlost světla rovna $c = 1$ ly/yr a podle Adamových hodin Bob doletí k Siriu během 10 let a stejnou dobu poletí zpět, tj. dohromady 20 let. První část Bobovy trajektorie v prostoročasu je dána rovnicí $x' = 0$ v S', která podle (2) přejde na tvar $ct = \frac{5}{4}x$ v S – viz dolní tlustá čára na obr. 2 nazývaná světočára. Její druhá horní polovina, která odpovídá inerciálnímu systému S'' o rychlosti $(-v)$, je dána rovnicí $x'' = 0$, tj. $ct = 20$ ly $- \frac{5}{4}x$.



Obrázek 2. Na svislé ose t je čas v rocích, zatímco na vodorovné ose x je vzdálenost ve světelných rocích. Levá svislá přímka je světočára Adama, který zůstává na Zemi. Pravá svislá přímka odpovídá světočáře Siria. Světočára letícího Boba je znázorněna tlustou po částech lineární čárou. Čerchovaně je budoucí světelný kužel ct $= |x|$. Čárkované úsečky označují současné události, kde t' v S' a t'' v S'' jsou konstantní, např. ct $= \frac{4}{5}x + 3,6$ ly .

Nyní se falešně argumentuje tím, že Bob při změně inerciální soustavy pocítí nekonečné zrychlení[2] během otočky u Siria a že to je hlavní důvod paradoxu dvojčat. To ovšem není pravda, protože když Bob dosáhne Siria, může vyslat informaci (např. fotografii) o svém skutečném stáří v soustavě S' jinému cestovateli, který právě míjí Sirius směrem k Zemi v soustavě S'' o rychlosti $(-v)$. Totéž lze uskutečnit i při Bobově startu ze Země a jeho návratu zpět. Navíc se tvrdí, že Bob při změně inerciální soustavy bude pozorovat skok v čase na Zemi (viz obr. 2). To také není pravda, jak ukážeme v následující kapitole (viz též [10]). Skok ale bude v pozorovaných frekvencích. Pod *pozorováním* zde rozumíme skutečné pozorování, nikoli rekonstrukci dějů, tedy rekonstrukci dějů „co bylo s čím současné" z pohledu cestujícího Boba před otočkou a po otočce. Taková rekonstrukce právě poukazuje na zmíněnou podstatu relativnosti současnosti. Zájemce o tuto problematiku odkazujeme na článek [10] či na stránky `www.cpp.edu/$\sim$ajm/materials/twinparadox.html`.

3 Jednoduché řešení paradoxu dvojčat

Než si představíme správné řešení paradoxu dvojčat, dokážeme následující větu.

Věta 3.1
Rozdíl $(ct)^2 - x^2$ *je invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci.*

Důkaz. Z (2)–(3) a (1) pro rozdíl čtverců dostáváme

$$\begin{aligned}(ct')^2 - x'^2 &= (ct' - x')(ct' + x') \\ &= \gamma\Big(ct - \frac{vx}{c} - x + vt\Big)\gamma\Big(ct - \frac{vx}{c} + x - vt\Big) \\ &= \gamma^2\Big(1 + \frac{v}{c}\Big)(ct - x)\Big(1 - \frac{v}{c}\Big)(ct + x) = (ct)^2 - x^2, \end{aligned} \tag{5}$$

což se mělo dokázat. □

Položme opět

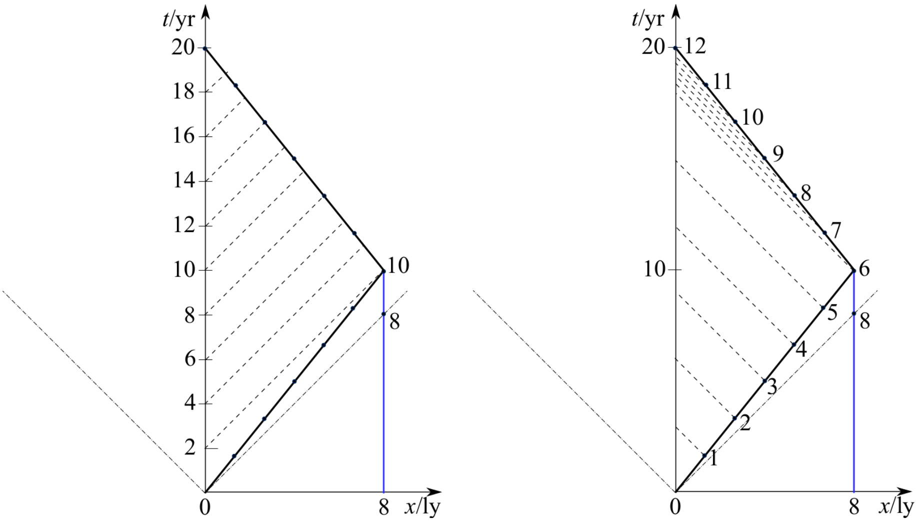
$$v = 0,8c.$$

(Pro obecné $v \in (-c, c)$ lze postupovat zcela analogicky.) Protože Bob je v klidu v soustavě S', platí $x' = 0$. Pro $\Delta t = 10$ yr a $\Delta x = 8$ ly z (5) dostaneme

$$c\Delta t' = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \sqrt{100 - 64}\ \text{ly} = 6\ \text{ly}.$$

[2] Roger Penrose [8, p. 421] zakulacuje Bobovu světočáru v blízkosti startu, otočky a přistání, aby se vyhnul nekonečným zrychlením.

Bob tedy poletí k Siriu jen 6 roků vzhledem k jeho vlastnímu času (viz černé puntíky na světočáře Boba na obr. 3). Jeho hodiny budou u Siria ukazovat 6 let. Bob po otočce bude cestovat zpět na Zemi rychlostí $(-v)$ opět 6 let vůči jeho vlastnímu času. Při příletu tedy bude o $20 - 2 \times 6 = 8$ mladší než jeho dvojče Adam.



Obrázek 3. Značení je stejné jako v obr. 2 kromě čárkovaných úseček, které zde označují trajektorie fotonů vysílaných pravidelně Adamem a Bobem. Vlevo: Adam posílá pravidelně signál Bobovi. Vpravo: Bob posílá pravidelně signál Adamovi. Je patrno, že ani Adam, ani Bob nebudou pozorovat skok v čase ale skok v přijímaných frekvencích.

Podívejme se ještě, jak se mění frekvence přijímaných signálů. Dopplerův jev, který není zahrnut ve vztazích (2)–(3), nelze při pozorování odstranit. Označme f_0 klidovou frekvenci stejných hodin Adama a Boba. Jestliže se Bob vzdaluje od Adama rychlostí v, pak podle relativistického Dopplerova jevu bude Adam v S detekovat frekvenci (viz [2, 4]),

$$f_v = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f_0. \tag{6}$$

Dosazením za $v = 0,8c$ zjistíme, že Adam bude pozorovat 3krát nižší frekvenci Bobových hodin, jelikož

$$\frac{f_v}{f_0} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \frac{1}{3}.$$

Podobně zjistíme, že po otočce Boba bude Adam přijímat frekvenci

$$f_v = 3f_0,$$

viz obr. 3. Přitom Bob bude přijímat stejné frekvence od Adama díky principu relativity. Během své cesty bude Bob pozorovat všechny časové děje na Zemi, i když s jinou frekvencí. Žádný časový interval tedy nebude přeskočen (srov. obr. 2 a 3).

Příklad 3.2
Pro jednoduchost předpokládejme, že Niel Armstrong letěl k Měsíci a zpět konstantní rychlostí $v = 10$ km/s a že $\Delta x = 384\,000$ km je vzdálenost k Měsíci. *O kolik sekund se vrátil mladší, když se vrátil z Měsíce?*

Řešení. Armstrongův jednosměrný let trval

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = 38\,400 \text{ s} \tag{7}$$

vzhledem k hodinám na Zemi. Pak podle (6) dostaneme

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \sqrt{(\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{c^2}} = \sqrt{38\,400^2 - 1,28^2} = \sqrt{1\,474\,559\,998,3616} \\ &= 38\,399,999\,978\,\overline{666} \text{ s.}\end{aligned}$$

Odtud a ze vztahu (7) obdržíme

$$\Delta t - \Delta t' = 0,000\,021\,344 \text{ s.}$$

Pro zpáteční cestu dostaneme stejnou hodnotu. Podle speciální teorie relativity se tedy Armstrong vrátil z Měsíce o 43 μs mladší, než kdyby zůstal na Zemi.

4 Vliv gravitačního pole na chod času

Podle obecné teorie relativity jdou hodiny na zemském povrchu pomaleji než u Měsíce. Položme si podobnou otázku jako v příkladu 1. Nyní ale zahrneme rozdílnou rychlost plynutí času na Zemi a mimo ni. Dále pro jednoduchost budeme předpokládat nulovou gravitaci mimo Zemi, tj. zanedbáme i gravitační pole Měsíce.

Příklad 4.1
Vrátil se Niel Armstrong z Měsíce mladší, než kdyby zůstal na Zemi?

Řešení. Pro vysílanou (emitovanou) frekvenci f_{em} v gravitačním poli a detekovanou frekvenci f v nulové gravitaci platí relativistický vztah (viz např. [11, s. 261])

$$f = f_{\text{em}}\sqrt{1 - \frac{r}{R}}, \tag{8}$$

kam dosadíme za $R = 6373$ km střední poloměr Země a za $r = 2GM/c^2 = 8,87$ mm Schwarzschildův poloměr Země, kde $G = 6,674 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2} je gravitační konstanta a $M = 5,972 \times 10^{24}$ kg hmotnost Země. Odtud dostaneme, že

$$\frac{f}{f_{\text{em}}} = 1 - 6,5 \times 10^{-10}.$$

Podle (7) se hodiny na Zemi za čas $2\Delta t = 76\,800$ s opozdí o

$$2\Delta t\Big(1 - \frac{f}{f_{\text{em}}}\Big) = 50\ \mu\text{s}.$$

Porovnáním s příkladem 1 zjistíme, že se Niel Armstrong vrátil dokonce starší, než kdyby zůstal na Zemi. V tomto případě se tedy efekty speciální a obecné teorie relativity vzájemně odečítají podobně jako při přesném nastavení GPS, viz [9].

Příklad 4.2

Albert Einstein si kdysi kladl otázku: *Jdou hodiny na rovníku rychleji než hodiny na pólu?* Tuto úlohu lze řešit analogicky jako příklad 2, proto se omezíme jen na hlavní body. Rovníkový poloměr Země je $R_1 = 6\,378\,135$ m a polární $R_2 = 6\,356\,750$ m. Předpokládejme, že hodiny na pólu mají frekvenci $f = 1$ s^{-1}. Hodiny na rovníku se zřejmě pohybují rychlostí $v = 2\pi R_1/T = 465,1$ m/s, kde $T = 86\,164,1$ s je délka siderického dne. Přitom na krátkém časovém intervalu jde téměř o inerciální soustavu. Pro frekvenci f' odpovídající f podle (4) je $f' = \gamma^{-1} f$, a tedy pro rozdíl těchto frekvencí podle (1) platí

$$f - f' = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) f = 1,2 \times 10^{-12}\text{s}^{-1}.$$

Pomocí vztahu (8) je frekvence $\tilde{f}$ hodin na rovníku o poloměru R_1, které se ale s ním nepohybují, o

$$\tilde{f} - f = 2,3 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1}$$

vyšší, než je frekvence f hodin na pólu vzdálených R_2 od středu Země. V tomto případě obecná teorie relativity opět způsobuje větší efekt než dilatace času.

Na závěr si ještě položme otázku: *Pro jakou rychlost v se dilatace času (daleko od všech gravitačních vlivů) vyrovnává se zpomaleným chodem hodin v gravitačním poli nějakého tělesa, např. Země, Marsu či Jupitera?* Odpověď na ni dává následující věta.

Věta 4.3
Čas na povrchu sféricky symetrického tělesa T o hmotnosti M a poloměru R plyne stejně rychle jako vlastní čas pozorovatele (daleko od všech gravitačních vlivů) pohybujícího se vůči tělesu T druhou kosmickou rychlostí $v = \sqrt{2GM/R}$.

Důkaz. Podle dilatace času (4) poměr odpovídajících frekvencí splňuje rovnost $f'/f = \gamma^{-1}$. Pomocí vztahů (1) a (8) tedy požadujeme, aby

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}.$$

Tudíž platí, že

$$v^2 = \frac{rc^2}{R} = \frac{2GM}{R}.$$

K vyrovnání chodu vlastních časů tedy dochází pro rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Tento vztah je ovšem známá 2. kosmická rychlost nutná k opuštění gravitačního pole daného tělesa. □

V knize [12, Sect. 3.5] se podrobně rozebírá, co znamená 2. kosmická rychlost v obecné teorii relativity.

Literatura – References

[1] Doppler, Ch.: Ueber das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. Abh. böhm. Ges. Wiss. **2** (1842), 466–482.

[2] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. der Phys. **322** (10) (1905), 891–921.

[3] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sand, M.: The Feynman lectures of physics I. Addison-Wesley Publ. Company, 1966.

[4] Křížek, M.: O paradoxech ve speciální teorii relativity. Obzory mat. fyz. inf. **49** (2020), č. 1, 31–40.

[5] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: Gravitation, 20th edition. W. H. Freeman, New York, 1997.

[6] Mixson, J. S.: The twin paradox of special relativity is solved. Infinity Publishing, 2014.

[7] Moriconi, M.: Special theory of relativity through the Doppler effect. Eur. J. Phys. 27 (2006), 1409–1424.

[8] Penrose, R.: The road to reality. Vintage Books, London, 2005.

[9] Ryston, M.: Obecná teorie relativity pro středoškoláky – třetí část: Dilatace času a GPS. Čs. čas. fyz. 70 (2020), 254–257.
[10] Sikora, P.: The twin paradox in a Loedel diagram. Eur. J. Phys. 39 (2018), 045707.
[11] Šolc, M. a kol.: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha, 1983.
[12] Taylor, E. F., Wheeler, J. A.: Exploring black holes – Introduction to general relativity. Addison Wesley, San Francisco, 2000.
[13] Taylor, E. F., Wheeler, J. A.: Fyzika priestoročasu – úvod do špeciálnej teórie relativity. Enigma, Nitra, 2012.
[14] Ženíšek, A.: Relativita do kapsy. Masarykova univ., Brno, 2015.

Poděkování: Autor děkuje prof. Alexandru Ženíškovi a neznámému recenzentovi za inspiraci a cenné připomínky a dále Haně Bílkové za nakreslení obrázků. Podpořeno RVO 67985840.

Adresa autora:

Matematický ústav, Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1
e-mail: `krizek@math.cas.cz`