

UMÍTE SI PŘEDSTAVIT UZAVŘENÝ VESMÍR?

MICHAL KŘÍŽEK, PETRI LIEVONEN

Úvod

V tomto článku popíšeme, jak si lze představit trojrozměrný uzavřený vesmír. K tomu účelu použijeme stereografickou projekci šesti hlavních kružnic trojrozměrné sféry do trojrozměrného euklidovského prostoru. Vzniklý kružnicový model lze vytisknout na standardní 3D tiskárně.

Kosmologie je odvětví astronomie zabývající se těmi největšími prostorovými a časovými vzdálenostmi a otázkami složení a vzniku celého vesmíru. Jednou z ústředních otázek také je, zda má vesmír konečný či nekonečný objem, tj. jaká je jeho globální geometrie. Pokud má konečný objem, šlo by ho čistě teoreticky obletět? Přitom je třeba důsledně rozlišovat mezi skutečným vesmírem a jeho matematickým modelem, viz (Křížek & Somer, 2023, s. 164) či viz (Křížek, 2025, s. 390).

Podle Koperníkova principu lidé na Zemi nejsou žádnými privilegovanými pozorovateli vesmíru. Nejsme tedy na nějakém významném speciálním místě – pupku světa, jako je např. špička vejce. Podle *Einsteinova kosmologického principu* (takto ho nazval E. A. Milne, viz (Milne, 1935)) je náš vesmír pro každý pevný časový okamžik homogenní a izotropní na velkých měřítkách. Zhruba lze říci, že jeho zakřivení je konstantní v každém bodě a ve všech směrech.

Přesněji řečeno, homogenita je předpokládaná vlastnost vesmíru, že v každém pevně daném časovém okamžiku a na velkých prostorových škálách se vesmír jeví všem pozorovatelům stejně, ať jsou kdekoli. Jinými slovy, v každém čase je vyžadována translační symetrie vesmíru, což vlastně tvrdí i Koperníkův princip. Přitom

se jedná jen o prostorové souřadnice. Homogenita v čase zřejmě neplatí, protože střední hustota vesmíru pozvolna klesá.

Podobně izotropie je předpokládaná vlastnost vesmíru, ve které se vesmír na velkých prostorových škálách jeví pozorovateli v jakémkoli bodě stejný ve všech směrech, tj. v každém pevně daném čase je požadována rotační symetrie vesmíru. Zde je třeba poznamenat, že například krystal dvojlomného vápence má homogenní vnitřní strukturu, která ale není izotropní, protože vykazuje v různých směrech různé vlastnosti. V tomto případě tedy rotační symetrie lokálně neplatí.

Existuje celá řada testů, které platnost izotropie vesmíru potvrzují, protože příslušné astrofyzikální objekty (mikrovlnné reliktní záření, aktivní jádra galaxií, kvazary, galaxie v Hubbleově hlubokém poli, záblesky gama aj.) jsou prakticky rovnoměrně rozloženy po celé nebeské sféře. K prokázání homogenity se používá Hubbleův test, viz (Křížek & Somer, 2023, s. 108), (Peebles, 1993, s. 21).

Známý německý fyzik a astronom Karl Schwarzschild (Schwarzschild, 1900) přišel s myšlenkou, že skutečný vesmír nemusí odpovídat nekonečnému trojrozměrnému euklidovskému prostoru $\mathbb{E}^3$, jak již koncem 16. století předpokládal Giordano Bruno, ale že jej lze popsat pro pevný čas uzavřenou trojrozměrnou sférou, tj. trojrozměrným povrchem čtyřrozměrné koule o poloměru $r > 0$:

$$\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2\}.$$

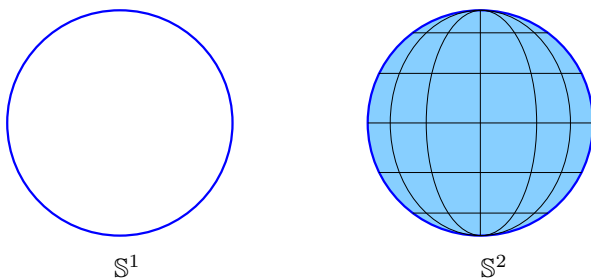
Při popisu skutečného vesmíru se geometrie ohraničené sféry $\mathbb{S}^3$ nemůže v čase náhle skokem změnit na neohraničený euklidovský prostor $\mathbb{E}^3$. Pro jednoduchost budeme nadále předpokládat, že poloměr $r = 1$.

Poznámka. Termín „uzavřený“ vesmír má v kosmologii zcela jiný význam než v matematice. Například neohraničený interval $(0, \infty)$ je uzavřená množina v $\mathbb{E}^1$, zatímco uzavřený vesmír je ohraničený (uzavřený sám do sebe a má konečný objem). Na druhé straně ohraničený interval $(0, 1)$ je otevřený v $\mathbb{E}^1$, ale otevřený vesmír je neohraničený. Modeluje se například prostorem $\mathbb{E}^3$.

Názorná vizualizace sféry $\mathbb{S}^3$ je ale poměrně obtížná. V (Křížek & Somer, 2023, s. 112) uvádíme 10 způsobů, jak si ji představit. Jednou z možností je použít stereografickou projekci.

Stereografická projekce

Jednorozměrnou sféru $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ a dvojrozměrnou sféru $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ si lze snadno představit, protože je můžeme vnořit (viz obrázek 1) do trojrozměrného euklidovského prostoru, jehož geometrie je nám blízká.

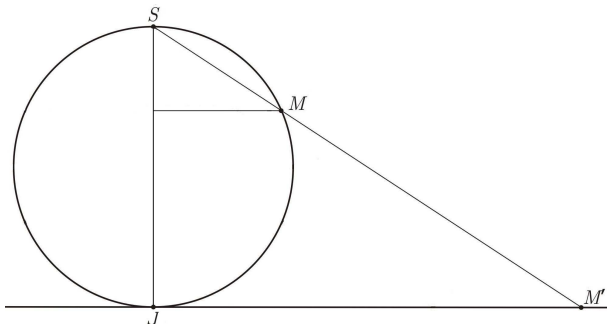


Obr. 1: Sféru $\mathbb{S}^1$ vlevo a sféru $\mathbb{S}^2$ vpravo lze vnořit do trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{E}^3$ tak, že se zachovávají úhly i vzdálenosti.

Sféru $\mathbb{S}^3$ ale nelze vnořit do $\mathbb{E}^3$, aby se zachovávaly vzdálenosti. Podobně nelze narovnat kulovou plochu $\mathbb{S}^2$ (ani její dvojrozměrnou část) do roviny $\mathbb{E}^2$. Jednou z možností je použít stereografickou projekci, která sice zachovává úhly, ale nezachovává vzdálenosti. Proto jsou všechny mapy zakřiveného povrchu Země nutně více či méně zkreslené.

Stereografická projekce ze severního pólu S nebeské sféry do roviny tečné k nebeské sféře v jižním pólu J byla použita například při konstrukci astronomického ciferníku pražského orloje, viz (Křížek et al., 2021, s. 246). Je definována takto. Nechť $M \in \mathbb{S}^2$ je libovolný bod jednotkové dvojrozměrné sféry takový, že $M \neq S$. Uvažujme meridiánový řez MSJ . V něm nám budou stačit jen dvě souřadnice, např. $S = (0, 1)$ je severní pól a $J = (0, -1)$ je pól

jižní. Označme (x, z) souřadnice bodu M v meridiánovém řezu. Z projekčního bodu S vedme polopřímku bodem M . Její průsečík s projekční rovinou $z = -1$ označme $M' = (x', -1)$. Bod M' se nazývá stereografickou projekcí bodu M . Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků z obrázku 2 vidíme, že pro neznámou souřadnici x' platí: $x' : 2 = x : (1 - z)$. Tedy $x' = 2x/(1 - z)$ pro $z \in \langle -1, 1 \rangle$.



Obr. 2: Stereografická projekce ze severního pólu S bodu M do roviny tečné ke kulové ploše v jižním pólu J . Obraz je označen M' .

Připomeňme si překrásnou Ptolemaiovu větu starou téměř 2000 let, kterou zformuloval slavný antický matematik a astronom, Klaudios Ptolemaios. Její podrobný důkaz je uveden např. v (Křížek et al., 2021, s. 247), viz též (Křížek & Křížek, 2011).

Věta 1 (Ptolemaiova). *Každá kružnice ležící na sféře $\mathbb{S}^2$ a neprocházející středem promítání se při stereografické projekci zobrazí opět na kružnici.*

Tak například na astronomickém ciferníku pražského orloje, což je projekční rovina nebeské sféry, jsou obrazy nebeského rovníku, ekliptiky (zodiaku), pražského horizontu a obratníků Raka a Kozoroha opět kružnicemi. Další důležitou vlastnost udává následující tvrzení, které dokázal již v roce 1695 Edmond Halley, když stereograficky promítal souhvězdí nebeské sféry do roviny. Geometrický důkaz je uveden např. v knize (Hilbert & Cohn-Vossen, 1990, s. 249).

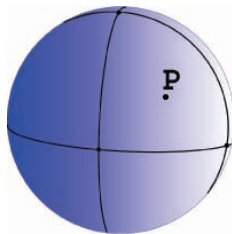
Věta 2. Stereografická projekce zachovává velikost úhlů.

Úhel mezi dvěma křivkami na sféře je tedy stejný jako úhel mezi jejich stereografickými obrazy v rovině. Například úhel mezi nebeským rovníkem a ekliptikou (tj. dráhou Slunce na nebeské sféře) je 23,5 stupně. Ve stereografické projekci na astronomickém ciferníku pražského orloje se tento úhel zachovává, viz (Křížek & Křížek, 2010). My se ale dále budeme zabývat zejména pravými úhly.

Připomeňme, že *hlavní kružnice* na kulové ploše S^2 má stejný poloměr a také stejný střed jako S^2 . Jde vlastně o geodetiku, jejíž části jsou nejkratšími spojnícemi dvou bodů na S^2 . Dále budeme uvažovat 3 hlavní kružnice

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1 \quad \text{a} \quad y^2 + z^2 = 1$$

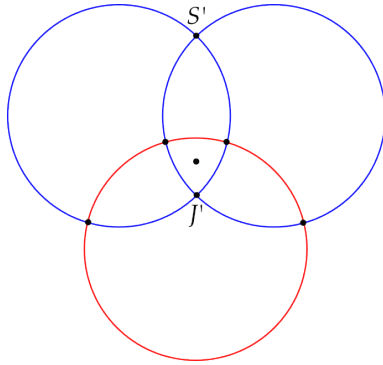
sféry S^2 , které leží ve vzájemně kolmých rovinách $z = 0$, $y = 0$ a $x = 0$. Proto se protínají v pravých úhlech v šesti význačných bodech $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ a $(0, 0, \pm 1)$, kde poslední dva jsou severní a jižní pól. Na zemském glóbu tyto kružnice odpovídají rovníku a poledníkům $(90^\circ, 270^\circ)$ a $(0^\circ, 180^\circ)$, viz obrázek 3.



Obr. 3: Tři hlavní kružnice kulové sféry S^2 se protínají v pravých úhlech. Projekční bod je označen písmenem P .

Nyní si ukážeme, jak se tyto tři hlavní kružnice zobrazí při stereografické projekci do roviny. Při projekci ze severního pólu by se 2 kružnice tvořené poledníky zobrazily na přímky, protože nejsou splněny předpoklady věty 1. Proto tentokrát nebudeme promítat ze severního pólu (jako v případě pražského orloje) ale z bodu $P = (p, p, p) \in S^2$, kde $p = \sqrt{3}/3$, který je symetrický

umístěný vzhledem ke třem uvažovaným kružnicím, viz obr. 3. Promítat budeme do roviny, která je tečná k $\mathbb{S}^2$ v protilehlém bodu $(-p, -p, -p)$. Obrazy uvažovaných kružnic budou podle Ptolemaiovy věty 1 opět kružnice, které se protínají v šesti pravých úhlech, viz věta 2. Stereografický obraz rovníku je na obrázku 4 umístěn dole, projekce severního a jižního pólu jsou označeny S' a J' , projekční bod P se vlastně „zobrazí do nekonečna“ a jeho protilehlý bod se zobrazí do středu obrázku 4.



Obr. 4: Obrazy tří hlavních kružnic kulové sféry z obrázku 3 jsou opět kružnice, které se protínají v pravých úhlech.

3D tisk kružnicového modelu uzavřeného vesmíru

Na jednotkové sféře $\mathbb{S}^3$ nyní uvažujme 6 hlavních kružnic

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1, \quad y^2 + z^2 = 1,$$

$$x^2 + w^2 = 1, \quad y^2 + w^2 = 1 \quad \text{a} \quad z^2 + w^2 = 1,$$

které se protínají kolmo v osmi bodech o souřadnicích $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$, $(0, 0, \pm 1, 0)$ a $(0, 0, 0, \pm 1)$. Nechť kupříkladu $S = (0, 0, 0, 1)$ je severní pól a $J = (0, 0, 0, -1)$ jižní pól sféry $\mathbb{S}^3$. Pak rovník sféry $\mathbb{S}^3$ leží v nadrovině $w = 0$, což je vlastně dvojrozměrná sféra $\{(x, y, z, 0) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. V ní leží první

tři uvažované hlavní kružnice (srov. též obrázek 3). Další tři hlavní kružnice se protínají kolmo v severním pólu S a jižním pólu J .

Stereografickou projekci výše uvedených šesti hlavních kružnic do trojrozměrného eukleidovského prostoru $\mathbb{S}^3$ můžeme zkonstruovat zcela analogicky jako ve dvojrozměrném případě. Tentokrát ale budeme promítat z bodu $P = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, který leží na sféře $\mathbb{S}^3$ a je umístěn symetricky vzhledem ke všem uvažovaným šesti hlavním kružnicím. Jejich středy do sféry $\mathbb{S}^3$ nepatří, a proto se při stereografické projekci ani nikam nezobrazují.



Obr. 5: Kružnicový model uzavřeného vesmíru, v němž se nezachovávají vzdálenosti, ale zachovávají se úhly. Všech 6 kružnic má proměnnou „tloušťku“, aby byl model odolný vůči mechanickému namáhání.

Je známo, že Ptolemaiovu větu 1 i větu 2 lze zobecnit na libovolnou dimenzi, viz např. (Whittaker, 1973). Proto se šest hlavních kružnic sféry $\mathbb{S}^3$ při stereografické projekci do trojrozměrného eukleidovského prostoru $\mathbb{E}^3$ zobrazí opět na kružnice, které se protínají v pravých úhlech, viz obrázek 5. Výsledný model lze vytisknout na běžné 3D tiskárně, viz (Segerman, 2016, s. 53). Příslušný program je k dispozici na webové adrese:

<https://www.thingiverse.com/thing:1570212>

Soubor OBJ kóduje geometrii modelu z obrázku 5.

Na tomto statickém modelu si můžete vyzkoušet, že když se ze severního pólu S vydáte po libovolné hlavní kružnici jakýmkoliv směrem, tak se přes jižní pól J dostanete zase zpět do severního pólu S . Přitom rovník minete dvakrát. Je to podobné situaci znázorněné na obrázcích 3 a 4, kde jsou v severním pólu k sobě kolmé dva směry. Jenomže na sféře $\mathbb{S}^3$ jsou v severním pólu S k sobě kolmé tři směry: nahoru–dolů, vpravo–vlevo a dopředu–dozadu. Vzniká tak zcela přirozená otázka, zda by bylo možné obletět celý vesmír. Jestliže připustíme lineární růst poloměru $r = r(t)$ trojrozměrné sféry v čase t , pak lze skutečně vesmír obletět konstantní rychlostí po geodetice v konečném čase. Důkaz je uveden v (Křížek & Somer, 2023, s. 166).

Literatura

- [1] Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1990). *Geometry and the imagination*. Chelsea Publishing Company.
- [2] Křížek, M. (2025). On the validity of the principle of relativity in the physical universe. *Phys. Essays*, 38, 387–392.
- [3] Křížek, F., & Křížek, M. (2011). Astronomický ciferník pražského orloje. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, 86(1), 1–6.
- [4] Křížek, M., & Křížek, P. (2010). Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje. *Matematika-fyzika-informatika*, 19, 577–586.
- [5] Křížek, M., & Somer, L. (2023). *Mathematical aspects of paradoxes in cosmology*. Springer.
- [6] Křížek, M., Somer, L., & Šolcová, A. (2021). *From great discoveries in number theory to applications*. Springer.
- [7] Milne, E. A. (1935). *Relativity, gravitation and world structure*. Clarendon Press.
- [8] Peebles, P. J. E. (1993). *Principles of physical cosmology*. Princeton Univ. Press.

- [9] Segerman, H. (2016). *Visualizing mathematics with 3D printing*. Johns Hopkins Univ. Press.
- [10] Schwarzschild, K. (1900). Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes. *Viert. Astron. Gesellschaft*, 35, 337–347.
- [11] Whittaker, E. J. W. (1973). The hyper-stereographic projection of the four-dimensional hyper-sphere. *Acta Cryst.*, A29, 673–678.

Abstract

We describe how to imagine a three-dimensional closed universe. To do this, we consider six orthogonally intersecting great circles of a three-dimensional sphere. Then we apply a stereographic projection of these circles into three-dimensional Euclidean space. This projection maps circles on circles and preserves angles. The resulting model can be printed on a standard 3D printer.

Michal Krížek
Matematický ústav AV ČR
Žitná 25
115 67 Praha 1
e-mail: krizek@math.cas.cz

Petri Lievonen
Physics Foundation Society
Espoo, Finland
e-mail: petri.lievonen@gmail.com