

ASTRONOMIE

Matematika kolem zatmění

MICHAL KRÍŽEK, MÚ AV ČR, Praha, MARIE VĚTROVCOVÁ, FAV ZČU, Plzeň

1. Úvod

Pozorování zatmění Slunce a Měsíce má velký vědecký význam. Již sta-
rořečtí myslitelé při pozorování stínu Země během měsíčních zatmění
poznali, že je Země kulatá a že se volně „vznášejí“ v prostoru. Z tvaru
zemského stínu (obr. 1) pak odhadli, že je Země třikrát větší než Měsíc
(dnes víme, že 3,67krát).



Obr. 1. Částečné zatmění Měsíce

Pomocí starých záznamů babylónských astronomů o slunečních a mě-
síčních zatměních můžeme nyní zpětně vypočítat nepravdělnosti v rotaci
Země a rychlost jejího zpomalování (viz odst. 5). Rotace Země se totiž
zpomaluje působením slapových sil, a proto se den prodlužuje o 1,7 mili-
sekundy za století (viz [8]). Záznamy o zatměních rovněž umožnily upřes-
nit několik kalendářů starověkých civilizací, což dovoluje na den přesně
zjistit data některých významných událostí.

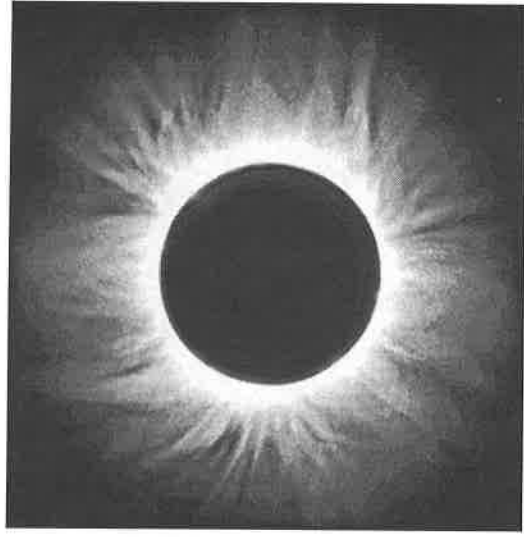
V roce 1911 Albert Einstein při svém pražském pobytu odvodil, že se
dráha světla hvězd v okolí Slunce zakřivuje v důsledku gravitace. Tento
efekt obecné teorie relativity byl poprvé vyfotografován při úplném slu-
nečním zatmění roku 1919. Světlo hvězd se odchýlilo od svého původního

směru téměř o dvě úhlové vteřiny, jak bylo zjištěno porovnáním s nočními
fotografiemi téže části oblohy. Celý experiment je popsán v [6].



Obr. 2. Výtrysky plazmatu (protuberance) pozorované při úplném zatmění
Slunce dne 11. 8. 1999 (foto M. V.)

Úplná zatmění Slunce nabízejí jedinečnou možnost pozorování sluneč-
ních protuberancí (obr. 2), sluneční chromosféry a koróny (obr. 3), která
je klíčem k pochopení mechanismu dějů odehrávajících se uvnitř naší
nejbližší hvězdy — Slunce.



Obr. 3. Koronární paprsky při úplném zatmění Slunce
dne 11. 8. 1999 (foto M. V.)

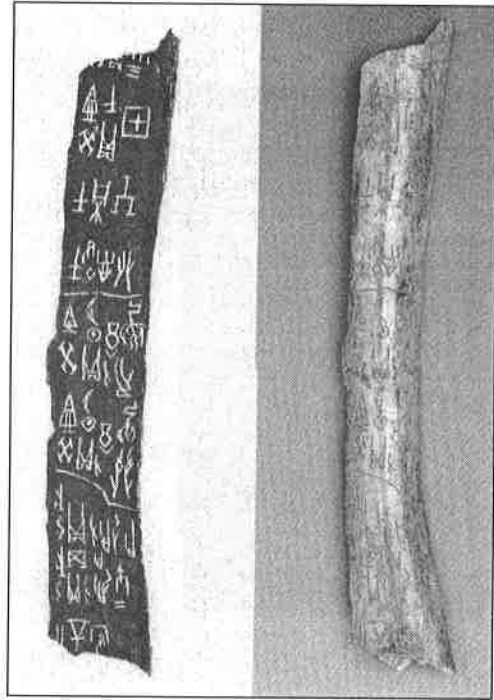
V roce 1983 byl při úplném zatmění Slunce objeven prachový prstenec
obíhající Slunce v jeho těsné blízkosti téměř v rovině ekliptiky.¹

¹ Ekliptika je dráha, po níž obíhá Země kolem Slunce.

2. Krátce z historie pozorování zatmění

Ze starověku se traduje historika o neblahém osudu dvou čínských císařských hvězdářů Si a Che. Ti se r. 2137 př. n. l. opili a zanedbali tak své povinnosti v průběhu úplného slunečního zatmění. Měli totiž střelit šípy na oblohu poírající Slunce. Císařův rozkaz byl jednoznačný: poprava. Tato událost ovšem není doložena žádnou písemností, protože v té době ještě Čína neznala písmo (to vzniklo až po r. 2000 př. n. l.).

Pravděpodobně nejstarší záznam zatmění Slunce je na kosti (obr. 4) nalezené v Anyang v čínské provincii Henan. Podle [4, str. 82] se jeho



Obr. 4. Popis zatmění Slunce na kosti nalezené v Číně

původ datuje kolem roku 1300 př. n. l. V [9] je seznam 36 zatmění Slunce mezi roky 720–495 př. n. l. zaznamenaných v klasické čínské knize *Čchun-čchjou* (Jara a podzimy).

Další ověřený popis zatmění Slunce z období kolem roku r. 750 př. n. l. je klínovým písmem na hliněné destičce z Mezopotámie uchovávané v Britském muzeu v Londýně (viz [11]). V Evropě poprvé předpověděl zatmění Slunce r. 585 př. n. l. řecký myslitel Thalés z Mílétu. Učinil tak patrně na základě znalosti periodicity zatmění (viz [12]). V článku [8] jsou uvedeny doslovné překlady záznamů zatmění na hliněných destičkách muslimských astronomů z let 829–1019.

3. Vznik a periodicitata zatmění

Kdyby Měsíc obíhal Zemi v rovině ekliptiky, pozorovali bychom zatmění Měsíce při každém úplňku a zatmění Slunce při každém novu. Sklon dráhy Měsíce k ekliptice je ale $5,2^\circ$ (průsečnice jeho dráhy s ekliptikou se nazývají *uzly*). Proto k zatmění Slunce někde na Zemi může dojít tehdy a jen tehdy, když je Slunce vzdáleno od uzlu nejméně o 10° a zároveň je Měsíc v novu. Podobně nastávají zatmění Měsíce.

Protože se Země pohybuje kolem Slunce po eliptické dráze s malou excentricitou, úhlový průměr Slunce se mění od $0,52^\circ$ (v létě) do $0,54^\circ$ (v zimě). Rovněž úhlový průměr Měsíce se mění v důsledku jeho eliptické dráhy v rozmezí $0,49^\circ$ až $0,56^\circ$ (viz [2]). Zcela náhodou jsou tyto úhly skoro stejné (obr. 5). Jestliže jsou postupně středy Slunce, Měsíce a Země v jedné přímce, vidíme z některých míst na Zemi zatmění Slunce. Je-li navíc úhlový průměr Měsíce menší než úhlový průměr Slunce, nastává prstencové zatmění. V opačném případě nastává zatmění úplné.

Jestliže Země leží na úsečce Slunce–Měsíc nebo v její blízkosti, dochází k zatmění Měsíce. To je vidět z celé neosvětlené polokoule Země, zatímco úplné zatmění Slunce jen z úzkého pásu na zemském povrchu. Celá teorie vzniku zatmění je podrobně popsána např. v [1].

Již staří Babylóňané si povšimli, že zatmění vykazují jistou periodičnost. Její znalost pak umožňovala v minulosti předpovídat nejen zatmění Měsíce, ale i Slunce (viz [10, str. 133]). Složitou periodicitu zatmění znali také dávní obyvatelé Ameriky a možná též stavitelé Stonehenge. Abychom si objasnili, čím je to způsobeno, uveďme nejprve dvě definice.

Drakoničský měsíc = 27,212 22 dní je doba průchodu Měsíce uzlem k následujícímu průchodu týmž uzlem.

Synodičský měsíc = 29,530 59 dní je doba od jedné fáze Měsíce k téže fázi následující.

Nyní se snadno můžeme přesvědčit, že

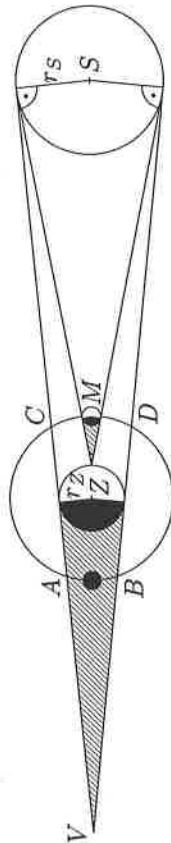
$$242 \text{ drakoničských měsíců} \doteq 223 \text{ synodičských měsíců} \\ (= \text{perioda cyklu}), \quad (1)$$

(což je vlastně podobné nejmenšímu společnému násobku, kde se místo celých čísel uvažují čísla racionální). Od 6. stol. př. n. l. Chaldejci nazývali tuto periodu zatmění *saros*. Její délka je 18 let 9 až 11 dní 7 hodin a 43 minuty.² To, že počet dní je buď 9, 10, anebo 11, je dáno tím,

² Za 7 hodin a 43 minuty se Země otočí téměř o 120° na západ. Proto po třech periodách sarosu dochází k zatmění Slunce téměř ve stejné místě.

že perioda saros může zahrnovat 3 až 5 přestupných let. Během této doby nastane 40 zatmění Slunce (14 prstencových, 12 úplných a 14 částečných) a 26 (17 úplných a 9 částečných) zatmění Měsíce. Předchozí čísla je nutno chápat jen přibližně, protože se s časem mění. Navíc úplná zatmění Slunce za 250 miliónů let zcela vymizí, neboť se střední vzdálenost Měsíce od Země neustále zvětšuje (i když jen rychlostí 38 mm za rok). Také nepatrně roste poloměr Slunce a střední vzdálenost Země od Slunce. Poznamenejme, že zatmění Měsíce mají stejnou délku periody jako zatmění Slunce.

Rozdíl obou hodnot ve vztahu (1) je jen 0,035 67 dne. Proto se každé úplné zatmění po několika periodách stane částečným a později už vůbec nenastane, neboť je nahrazeno nějakým novým zatměním. To je důvod, proč se tyto periody číslují.³ Například pro zatmění Slunce (viz [5]): saros 130 byl 26. února 1998 a bude opět 9. března 2016, saros 135 byl 22. srpna 1998 a bude opět 1. září 2016, saros 140 byl 16. února 1999 a bude opět 26. února 2017, saros 145 byl 11. srpna 1999 a bude opět 21. srpna 2017.



Obr. 5. Stíny Země a Měsíce

4. Proč jsou zatmění Měsíce méně častá než zatmění Slunce?

Odpověď na tuto otázku nám dává obrázek 5. Země osvětlená Sluncem za sebou skrývá kuželový stín, který je dlouhý zhruba $d = 1\,356\,000$ kilometrů. Pokud se do něj dostane Měsíc, nastane jeho zatmění. Označíme-li V vrchol stínu Země, S střed Slunce a Z střed Země, můžeme hodnotu $d = |VZ|$ snadno zjistit z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (srov. obr. 5). Platí totiž, že

$$\frac{r_Z}{r_S} = \frac{|VZ|}{|VS|} = \frac{d}{d + R_Z},$$

kde $r_Z = 6\,368$ km, $r_S = 695\,990$ km a $R_Z = 1,496 \cdot 10^8$ km jsou po řadě střední hodnoty poloměru Země, poloměru Slunce a vzdálenosti Země od Slunce.

³ Číslování zavedl G. van den Bergh r. 1955.

Střední vzdálenost Měsíce od Země je $R_M = 384\,400$ km (tj. délka úsečky AZ na obr. 5). Jak již bylo řečeno, k zatmění může dojít jen tehdy, je-li Měsíc v blízkosti ekliptiky. Jestliže se navíc nachází na oblouku \widehat{AB} (obr. 5), nastává zatmění Měsíce, a jestliže je na oblouku \widehat{CD} , nastává někde na Zemi zatmění Slunce.

Povšimneme si ale, že oblouk \widehat{AB} je mnohem kratší než oblouk \widehat{CD} . Oproti nákrese na obr. 5 je skutečný úhel při vrcholu V velmi malý (asi $0,5^\circ$), a proto poměr jejich délek je v prvním přiblížení roven poměru délek úseček AB a CD . Tedy

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AV|}{|CV|} \approx \frac{d - R_M}{d + R_M} \doteq 0,56.$$

Vidíme, že tento poměr zhruba odpovídá poměru (26 měsíčních zatmění)/(40 slunečních zatmění) $= 0,65$ během periody saros (viz odst. 3).

5. Zpomalování rotace Země

Podle [8, str. 270] se v průběhu posledních 2 700 let rotace Země zpomalovala tak, že délka dne vzrůstala průměrně o 1,7 ms za století. Tato hodnota byla získána důkladným rozбором desítek záznamů babylónských astronomů i novějších pozorování.

Pro jednoduchost uvažujme jen jeden konkrétní případ. V pramenu [11, str. 340] se uvádí, že došlo k zatmění Slunce 15. dubna roku 136 př.n.l. Tehdy byl den přibližně o $\tau = 0,036\,312$ sekundy ($\doteq 21,36$ stol. $\times 1,7$ ms/stol.) kratší než v roce 2000. Od té doby uplynulo asi $N = 780\,000$ dní a vzhledem ke kumulativnímu efektu je nyní Země opožděna o necelé 4 hodiny, než kdyby se po celou tu dobu točila rovnoměrně. To odpovídá úhlu 60° .

Jak se k tomuto posunu dospěje? Předpokládejme pro jednoduchost, že délka i -tého dne (počítaná od zmíněného zatmění) narůstala lineárně o hodnotu

$$\Delta t_i = \tau \frac{i}{N}.$$

Celkový nárůst za N dní je tedy

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_N = \frac{\tau}{N} (1 + 2 + \dots + N) = \\ &= \tau \frac{N+1}{2} = 14\,162 \text{ [s]} \doteq 4 \text{ [hod]}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hodnota zpomalování rotace Země se ale počítá opačným postupem. Kdyby se rotace Země neměnila, pak by staří astronomové nemohli pozorovat zatmění tam, kde jej popisují, ale o 4 časová pásma vedle. Tehdejší lokální čas zatmění totiž můžeme nyní celkem přesně určit z výšky

Slunce nad obzorem, kterou Babylóňané při zatmění měřili pomocí gnomonu a pečlivě ji zaznamenávali. Z posunu $\Delta T = 4$ hodiny a počtu dnů N lze zpětně získat (viz (2)) odpovídající τ , a odtud velikost zpoždění rotace Země $\tau/21,36 = 0,0017$ sekund za století. Tato hodnota je v souladu s tím, že před 400 milióny let trval den jen asi 22 hodin, což bylo zjištěno z „letokruhů“ mořských korálů (viz [3, str. 183]). Vskutku, kdyby zpoždění bylo lineární funkcí času, pak by tehdy byl den kratší o $400 \cdot 10^6 \cdot 0,0017/100$ [s] = 6800 [s] ≈ 2 [hod].

Poznamenáme ještě, že chyba nerovnoměrnosti rotace Země je rozdíl mezi terestrickým časem, který je odvozen od chodu nejprěsnějších atomových hodin světa, a světovým (Greenwichským) časem definovaným rotací Země.

6. Další číselné údaje o zatmění

Slunečních zatmění je sice více než měsíčních,⁴ ale rozměry pásu (šíře max. 270 km, délka tisíce až desetitisíce km) stínu Měsíce na povrchu Země neumožňují masové pozorování úplného zatmění Slunce (viz [7]). Pro jedno konkrétní místo na Zemi tak dojde k úplnému zatmění Slunce zhruba jednou za 360 let.

Doba trvání zatmění je závislá především na vzdálenosti pozorovatele od středové čáry pásu. Částečné zatmění Slunce může trvat až dvě a půl hodiny, zatímco u úplného zatmění se čas počítá na minuty (na ose obvykle 1 až 4 minuty, maximálně však 7,6 minuty). Měsíční stín zasahuje Zemi nejvýše 6 hodin a rychlost jeho pohybu (vždy od západu k východu) je 600–1000 m/s.

První úplné zatmění Slunce třetího tisíciletí protne 21. června 2001 jižní Afriku. Evropa (Island, Skotsko) si musí i na prstencové zatmění počkat až do 31. května 2003. Zajímavý úkaz nastane 3. listopadu 2013 v Africe, kde se prstencové zatmění Slunce změní na úplné.

Těm, kteří by se rádi aktivně připojili k pozorování zatmění či je tato problematika zajímá, doporučujeme ještě následující odkazy na internetové stránky:

<http://www.zatmeni.cz>
<http://www.astro.zcu.cz>
<http://umbra.gsfc.nasa.gov/eclipse>
<http://www.ct.astro.it/eclissi.html>

⁴ K zatmění Měsíce může dojít až třikrát v jednom roce, ale v některých letech nemusí nastat vůbec. Naproti tomu každoročně na Zemi můžeme spatřit 2 až 5 zatmění Slunce různého typu. Průměrně připadají dvě úplná zatmění na dobu tří let.

<http://www.msen.com/~eclipse/>
<http://www.spirit.com.au/~minnah/LEO.html>
<http://planets.gsfc.nasa.gov/eclipse/eclipse.html>

Mohli jste si všimnout, že k vyšetřování zatmění nám vlastně posloužila řada matematických disciplín (teorie řad, přibližné a numerické metody, trigonometrie a stereometrie, teorie křivek apod.). Matematické metody mají totiž široké uplatnění v celé astronomii a mnoha dalších oborech.

Na závěr nám dovolte poděkovat RNDr. Aleně Šolcové za cenné připomínky.

Literatura:

- [1] J. Bouška, V. Vanýsek: *Zatmění a zákrty nebeských těles*. Academia, Praha, 1963.
- [2] A. Dědoch, K. Halíř, M. Větrovcová: *Zatmění Slunce 11. srpna 1999*. Západočeská pobočka ČAS, Praha, 1998.
- [3] J. Grygar, Z. Horský, P. Mayer: *Vesmír. Mladá fronta*, Praha, 1983.
- [4] P. Guillermier, S. Koutichny: *Total eclipses*. Springer, 1999.
- [5] P. S. Harrington: *Eclipse!*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [6] J. Havránek, M. Solc, J. Grygar: *V Praze o Einsteinovi a o Einsteinovi v Praze*. Vesmír 58, 1979, 178–183.
- [7] L. Honzík a kol.: *Zatmění Slunce 11. srpna 1999* (skriptum). Západočeská pobočka ČAS, Pízeň – Rokycany, 1999.
- [8] S. S. Said, F. R. Stephenson: *Solar and lunar eclipse measurements by medieval Muslim astronomers*. Journal for the History of Astronomy 27, 28, 1996/97, 259–273, 29–48.
- [9] K. Slavíček: *Listy z Činy do vlasti*. Vyšehrad, Praha, 1995.
- [10] J. M. Steele: *Solar eclipse times predicted by the Babylonians*. Journal for the History of Astronomy 28, 1997, 133–139.
- [11] J. M. Steele, F. R. Stephenson: *The accuracy of eclipse times measured by the Babylonians*. Journal for the History of Astronomy 28, 1997, 337–345.
- [12] F. R. Stephenson, L. J. Patoohi: *Thales's prediction of a Solar eclipse*. Journal for the History of Astronomy 28, 1997, 279–282.