MATEMATIKA

O Keplerově rovnici

MICHAL KŘÍŽEK

Matematický ústav AV ČR, Praha

Během svého pobytu v Praze Johannes Kepler studoval data, která získal z pozorování Tychona Brahe. Přitom zjistil, že se planety pohybují po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku je Slunce, a že plošná rychlost každé planety je konstantní (tzn., že spojnice středu Slunce a středu planety opíše stejně velké plochy za stejně dlouhé časové intervaly). Tak byl kolem roku 1605 objeven první a druhý Keplerův zákon,[1)] který byl prvně publikován ve stěžejním Keplerově díle *Astronomia nova* v roce 1609, tj. právě před 400 lety (viz [3]). To je jeden z důvodů, proč byl letošní rok vyhlášen Mezinárodním rokem astronomie.[2)]

Označme a hlavní a b vedlejší poloosu eliptické dráhy planety. Uvažujme kružnici o poloměru a a stejném středu, jako má elipsa na obr. 1. Pokud je (numerická) excentricita elipsy $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ kladná, pak se planeta nepohybuje rovnoměrně,[3)] a proto je důležité umět určit její polohu v daném čase. V části 1. a 2. si ukážeme, jak lze polohu na elipse popsat pomocí úhlu zvaného excentrická anomálie. Ve 3. části odvodíme Keplerovu rovnici, která svazuje excentrickou anomálii s rovnoměrně plynoucím časem, viz [1], str. 304.

1. Označme $r > 0$ heliocentrickou vzdálenost planety P od Slunce S, body A, B, C a úhly α, φ tak, jak je nakresleno na obr. 1. Je patrno, že

---

1) Z nich lze odvodit třetí Keplerův zákon (viz např. [2]), který Kepler uveřejnil až v roce 1619.

2) Před 400 lety také *Galileo Galelei* poprvé použil dalekohled pro astronomická pozorování.

3) Např. pro Mars, na který Kepler zejména upíral svoji pozornost, je $e \doteq 0,1$.

$$a\cos\alpha = |AC| = ae + r\cos\varphi\,, \tag{1}$$

$$\frac{r\sin\varphi}{a\sin\alpha} = \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{b}{a}\,,$$

kde úhel α se nazývá *excentrická anomálie* a úhel φ *pravá anomálie.*

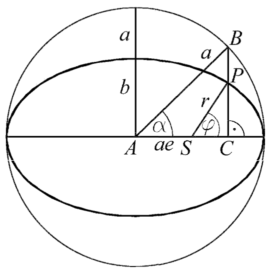
Z obou rovnic dostaneme po úpravě

$$r^2\cos^2\varphi = a^2\cos^2\alpha - 2a^2e\cos\alpha + a^2e^2\,,$$

$$r^2\sin^2\varphi = b^2\sin^2\alpha = a^2(1-e^2)\sin^2\alpha\,.$$

Jestliže tyto rovnice sečteme, obdržíme $r^2 = a^2 - 2a^2e\cos\alpha + a^2e^2\cos^2\alpha$. Odtud plyne vyjádření vzdálenosti r pomocí excentrické anomálie α,

$$r = a(1 - e\cos\alpha)\,. \tag{2}$$



Obr. 1

2. Dále se pokusíme vyjádřit pravou anomálii φ pomocí α. Dosadíme-li do (2) za $\cos\alpha$ ze vztahu (1), vidíme, že $r = a - e(ae + r\cos\varphi)$, tj.

$$\frac{r}{a}(1 + e\cos\varphi) = 1 - e^2\,. \tag{3}$$

Takto se někdy vyjadřuje první Keplerův zákon v polárních souřadnicích (r,φ). Z (1) po vydělení a a z (3) tak získáme

$$\cos\alpha = e + \frac{1-e^2}{1+e\cos\varphi}\cos\varphi = \frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\,.$$

Odtud dosazením do vztahu pro tangens polovičního úhlu máme

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}}{1+\frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}}=\frac{1+e\cos\varphi-e-\cos\varphi}{1+e\cos\varphi+e+\cos\varphi}=$$

$$=\frac{1-e}{1+e}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{1-e}{1+e}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

a tedy

$$\varphi=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4}$$

3. Nyní stanovíme rovnici pro výpočet α. Nechť $t=0$ je čas průchodu planety periheliem a T je její oběžná doba. Podle druhého Keplerova zákona je plošná rychlost planety konstantní a je rovna $\pi ab/T$ (viz [2]). Za čas $t\in\langle 0;T\rangle$ opíše tedy průvodič SP plochu $\pi abt/T$. Za stejný čas opíše úsečka SB plochu $\pi a^2t/T$ (tj. $\frac{a}{b}$-krát větší) a úsečka AB plochu $\pi a^2\frac{\alpha(t)}{2\pi}$. Rozdíl těchto ploch je roven obsahu trojúhelníka ASB (viz obr. 1)

$$\frac{a^2\alpha(t)}{2}-\frac{\pi a^2 t}{T}=\frac{ae}{2}a\sin\alpha(t).$$

Po vydělení číslem $-a^2/2$ dostaneme již *Keplerovu rovnici* pro excentrickou anomálii

$$\boxed{\frac{2\pi}{T}t=\alpha(t)-e\sin\alpha(t)\,.} \tag{5}$$

Levá strana $M(t)=2\pi t/T$ se nazývá *střední anomálie*, protože je lineární funkcí času.

Pro zadaný čas t tak můžeme z Keplerovy rovnice (5) určit úhel $\alpha(t)$ pomocí nějaké iterační metody. Z (2) pak určíme vzdálenost $r(t)$ a z (4) vypočteme $\varphi(t)$. Tím je poloha planety v rovině dráhy jednoznačně určena.

Dodnes obdivujeme, jak Kepler odvodil rovnici (5) a své tři zákony o pohybu planet. Musel mít obrovskou geometrickou představivost, fyzikální intuici a mimořádnou schopnost analyzovat velké množství dat o polohách planet.

Literatura

[1] *Bertotti, B. – Farinella, P. – Vokrouhlický, D.*: Physics of the Solar system. Kluwer, Dordrecht, 2003.
[2] *Křížek, F. – Křížek, M. – Šolc, J.*: Jakou hmotnost má černá díra uprostřed naší Galaxie? Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 49 (2004), s. 104-113.
[3] *Šolcová, A.*: Johannes Kepler, zakladatel nebeské mechaniky. Prometheus, Praha, 2004.

O jedné metodě dokazování geometrických nerovností

PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice

V článku je uveden způsob dokazování geometických nerovností metodou, která spočívá ve vyjádření polynomu, který danou nerovnost popisuje, ve tvaru součtu čtverců polynomů.

Jako ukázka použití této metody slouží úloha, která byla řešena ve 29. ročníku MO (1980), v kategorii A. Nejprve je podán klasický způsob řešení, ve druhé části je ukázána metoda, ve které použijeme vyjádření polynomu ve tvaru součtu čtverců (metoda *sos**)). Budeme se zabývat následující úlohou:

Trojúhelník ABC o stranách a, b, c má obsah P a trojúhelník KLM o stranách k, l, m má obsah Q. Dokažte, že pak platí:

$$k^2(-a^2+b^2+c^2)+l^2(a^2-b^2+c^2)+m^2(a^2+b^2-c^2) \ \geq\ 16\,PQ. \quad (1)$$

Pro které trojúhelníky platí rovnost?

Řešení. Uvedeme řešení podle [1]. Označme úhel, který svírají strany a, b trojúhelníka ABC symbolem γ a úhel, který svírají strany k, l v $\triangle KLM$ jako φ. Potom pro obsahy P a Q trojúhelníků ABC a KLM platí

*) *sos* znamená anglicky „sum of squares“ – „součet čtverců“.