vyučování

GRAVITAČNÍ ZÁKON – OBJEV TISÍCILETÍ

Michal Křížek, Praha

Každý nový objev prochází třemi stadii:
v prvém je směšný,
v druhém je potírán,
v třetím je samozřejmý.

ARTHUR SCHOPENHAUER

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly mezi dvěma hmotnými body[1]) rovna

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \qquad (1)$$

kde m a M jsou jejich hmotnosti, r je jejich vzdálenost a

$$G \doteq 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}} \qquad (2)$$

je gravitační konstanta.[2]) Velkým triumfem tohoto zákona bylo objevení planety Neptun díky pozorovaným poruchám v dráze Uranu. Předpokládanou polohu Neptunu nejprve vypočítal anglický matematik a astronom John Couch Adams a nezávisle též francouzský astronom Urbain Jean Joseph Leverrier. V roce 1846 pak Neptun na obloze objevil německý astronom Johann Gottfried Galle jen necelý stupeň od vypočtené polohy (podrobnosti viz [9]). Pomocí (1) byla nalezena i některá další nebeská tělesa, např. americký optik Alvan G. Clark objevil v r. 1862 téměř neviditelného průvodce (tzv. Štěňátko) hvězdy Siria, což později vedlo k objevení superhustých těles (bílých trpaslíků) o hustotách[3]) řádově 10^7 až 10^{11} kg/m^3 (viz [3]). V roce 1933 zase americký astrofyzik Fritz Zwicky zjistil, že v souhvězdí Vlasy Bereniky je kupa více než tisíce galaxií, které obíhají kolem středu kupy mnohem rychleji, než by mělo vyplývat z gravitačního zákona (viriálové věty – viz [10]). Odhalil tak ve vesmíru existenci záhadné temné hmoty.

Newtonův gravitační zákon nám umožňuje navrhovat a počítat trajektorie kosmických sond a získávat tak další unikátní data o vesmíru, předpovědět srážku planetky či komety se Zemí, odhadnout, kolik bychom vážili na Marsu atd. V článku [7] jsme ukázali, jak můžeme z (1) a ze znalosti úhlového průměru Slunce stanovit střední hustotu Slunce 1409 kg/m^3, aniž bychom znali vzdálenost Země–Slunce. V tomto příspěvku uvedeme některá další zajímavá použití Newtonova gravitačního zákona vhodná pro výuku fyziky na středních školách. Uvidíme, jak s jeho pomocí lze překvapivě určit některé zdánlivě nezjistitelné hodnoty fyzikálních veličin na neuvěřitelně velké vzdálenosti. Gravitační zákon nám tak výrazně po-

[1]) V některých učebnicích se nepřesně píše, že F v (1) je velikost gravitační síly mezi jakýmikoliv dvěma tělesy. Neřekne se totiž, jak se definuje jejich vzdálenost. Např. co je r pro prstenec a kouli v jeho středu? Proto se v (1) i v dalších matematických vztazích a modelech omezujeme jen na idealizované hmotné body.

[2]) V roce 1798 britský fyzik a chemik Henry Cavendish odhadl střední hustotu Země pomocí torzních vah, viz [2]. Jeho měření o sto let později vedla k následující hodnotě $G \doteq 6{,}75 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$. Cavendish se proslavil též tím, že objevil vodík a složení vody.

[3]) Hustoty ještě o mnoho řádů vyšší byly později zjištěny u neutronových hvězd.

mohl posunout hranice lidského poznání daleko dopředu zcela nečekaným směrem.

1. Jak velká je konstanta ve 3. Keplerově zákonu? Třetí Keplerův zákon ve své nejjednodušší podobě říká, že třetí mocnina hlavní poloosy a eliptické dráhy planety ku druhé mocnině její oběžné doby T je konstantní, tj. $a^3/T^2 = C$. Odtud můžeme například vypočítat vzdálenosti všech planet od Slunce ze znalosti jejich oběžných dob, vzdálenosti Slunce–Země a oběžné doby Země. Skutečný význam konstanty C ale Kepler neznal. Také v řadě středoškolských učebnic není uvedeno, jak můžeme tuto konstantu C vyjádřit a jakou má vlastně hodnotu. Přitom ji lze pro tělesa obíhající kolem Slunce snadno odvodit z (1) např. pro kruhovou dráhu[4]) planety o poloměru $r = a$. Je-li m hmotnost planety a $M = M_\odot$ hmotnost Slunce, pak podle dalšího Newtonova zákona, zákona akce a reakce, je dostředivá (gravitační) síla rovna odstředivé síle, tj.

$$G\frac{mM}{a^2} = \frac{mv^2}{a}, \tag{3}$$

kde v je oběžná rychlost planety. Dosadíme-li za $v = 2\pi a/T$ do (3), dostaneme jako důsledek 3. Keplerův zákon ve tvaru[5])

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \ (= C). \tag{4}$$

Z takto upraveného zákona lze získat další důležité informace, jak ještě uvidíme.

Velká poloosa zemské dráhy byla postupně zpřesňována různými metodami.[6]) Je prakticky rovna *astronomické jednotce* AU, tj. střední vzdálenosti Země–Slunce,

$$1\ \mathrm{AU} = 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}, \tag{5}$$

protože dráha Země je téměř kruhová. Vyjádříme-li velkou poloosu dráhy planety a v astronomických jednotkách a T v rocích, pak lze 3. Keplerův zákon (4) pro oběžnice Slunce zapsat mnohem jednodušeji:

$$a^3 \cong T^2, \tag{6}$$

kde symbolem $\cong$ označujeme jen číselnou rovnost, nikoli rozměrovou. Vynásobíme-li pravou stranu (6) konstantou $C = 1\,(\mathrm{AU})^3/\mathrm{rok}^2$, dostaneme i rovnost rozměrovou. Tento zápis má několik výhod, např. snadno můžeme vypočítat vzdálenosti všech planet od Slunce z pouhé znalosti jejich oběžných dob.

2. Jakou hmotnost má Slunce? Povšimněme si, že vztah (4) svazuje tři důležité fyzikální veličiny udávané v základních jednotkách soustavy SI:

m, kg, s.

Pokud známe dvě z nich, můžeme dopočítat třetí. Po dosazení za a z (5) do vztahu (4) okamžitě dostaneme hmotnost Slunce

$$M_\odot = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{a}{G} = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}, \tag{7}$$

kde $T = 31\,558\,149{,}54$ s je oběžná doba Země kolem Slunce (tzv. siderický rok).

3. Jakou hmotnost má Mars? V roce 1877 americký astronom Asaph Hall objevil Marsův měsíc Phobos, jehož oběžná doba je $P = 27\,631$ s (tj. 0,3198 dne). Tato skutečnost umožnila výrazně zpřesnit naši znalost hmotnosti Marsu m. Pomocí úhlových měření lze odhadnout,

[4]) Odvození pro eliptickou dráhu je například v článku [5].

[5]) Zde se mlčky předpokládá, že $m \ll M$. Jinak má 3. Keplerův zákon tvar $a^3/T^2 = G(M+m)/(2\pi)^2$.

[6]) Některé z nich se opírají právě o 3. Keplerův zákon (viz např. [7, s. 151]).

že délka hlavní poloosy dráhy Phobosu je $r \doteq 9{,}378 \cdot 10^6$ m. Podle (4) tedy platí

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{Gm}{4\pi^2} \tag{8}$$

a odtud již dostaneme, že $m = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg.

Hmotnost Marsu lze ale určit i bez znalosti gravitační konstanty G. Ze vztahů (4) a (8) totiž plyne, že

$$m = \frac{r^3}{a^3}\frac{T^2}{P^2}M_\odot,$$

kde $T = 59\,355\,072$ s (tj. 686,98 dní) je oběžná doba Marsu a $a = 227{,}94 \cdot 10^9$ m je délka hlavní poloosy jeho eliptické dráhy (jak lze rovněž zjistit pomocí (4)).

Podobným způsobem lze vypočítat hmotnosti všech vnějších planet a též Země.[7])

4. Jak dlouho bychom padali do Slunce? Ze vztahu (7) pro kruhovou dráhu planety o poloměru a dostáváme její oběžnou rychlost

$$v = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}}. \tag{9}$$

Dosadíme-li za a vzdálenost Země–Slunce z (5) a za $M_\odot$ hmotnost Slunce ze (7), zjistíme, že Země obíhá Slunce rychlostí cca

$$v = 29{,}8 \text{ km/s}. \tag{10}$$

Předpokládejme na okamžik, že nás (nebo nějaký předmět) někdo na této dráze zabrzdí, tj. udělí nám opačnou rychlost $-29{,}8$ km/s. Pak budeme vlastně volným pádem směřovat ke Slunci. Otázka je, jak dlouho bude tento pád trvat.

Kdyby Země obíhala v poloviční vzdálenosti od Slunce, pak by podle 3. Keplerova zákona (6) byla doba oběhu $0{,}5^{3/2} \cong \cong \sqrt{2}/4$ roku. Pokud by však dráha Země byla tak protáhlou elipsou o délce poloosy 0,5 AU, že by se v limitním případě rovnala úsečce Země–Slunce, pak by také obíhala $\sqrt{2}/4$ roku. Pád do Slunce by tedy trval $\sqrt{2}/8$ roku (tj. 64,6 dní).

Analogicky můžeme zjistit, že Neptun vzdálený 30 AU od Slunce by do něj padal $\frac{1}{2}\,15^{3/2} \cong 29$ let nebo že Měsíc by spadl na Zemi za 4,83 dne (viz [11]).

5. Jak velká je první, druhá a třetí kosmická rychlost? Aby těleso obíhalo Zemi po kruhové dráze o poloměru cca $r = 6450$ km (tj. nad hustými vrstvami atmosféry), je třeba mu udělit *první kosmickou rychlost* v_1. Podobně jako v (9) zjistíme, že

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7{,}9 \text{ km/s}, \tag{11}$$

kde $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ je hmotnost Země.[8])

Aby těleso o hmotnosti $m \ll M$ ve vzdálenosti r od středu Země uniklo z jejího gravitačního pole, je nutné mu udělit alespoň *druhou kosmickou rychlost* v_2. Je-li potenciální i kinetická energie tělesa v nekonečnu rovna nule, pak ve vzdálenosti r od Země musí mít těleso součet potenciální a kinetické energie také roven nule, tj.

$$-G\frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv_2^2 = 0.$$

[7]) K upřesnění hmotnosti Venuše byla analogicky použita americká sonda Magellan, která ji obíhala.

[8]) Označíme-li r okamžitou vzdálenost sondy, pak podle [1, s. 303] pro odpovídající orbitální rychlost na eliptické dráze s hlavní poloosou a platí $v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$.

Odtud a z (11) pro druhou kosmickou rychlost dostaneme

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} v_1 = 11{,}2 \text{ km/s}. \tag{12}$$

Třetí kosmická rychlost je úniková rychlost ze sluneční soustavy. Podobně jako ve (12) dostaneme, že[9])

$$v_3 = \sqrt{2} v = 42{,}1 \text{ km/s},$$

kde v je dáno (10).

6. Jak dlouho trvá cesta na Mars? Pro jednoduchost předpokládejme, že Země a Mars obíhají kolem Slunce po kruhových drahách o poloměrech 1 AU a $r = 1{,}524$ AU. Ekonomická dráha sondy ze Země k Marsu a zpět je nakreslena na obr. 1. Je v podstatě eliptická, protože po navedení na tuto dráhu sonda z úsporných důvodů vypne motory a po většinu letu ji Země a Mars téměř neovlivňují, neboť dominuje vliv Slunce.[10]) Eliptická dráha sondy má zřejmě délku hlavní poloosy $(1+1{,}524)/2$ AU a Slunce je v jednom z ohnisek. Podle 3. Keplerova zákona (6) je doba potřebná k letu na Mars rovna

$$\tfrac{1}{2} T \cong \frac{1}{2}\left(\frac{1+1{,}524}{2}\right)^{3/2} \cong 0{,}7 \text{ let.}$$

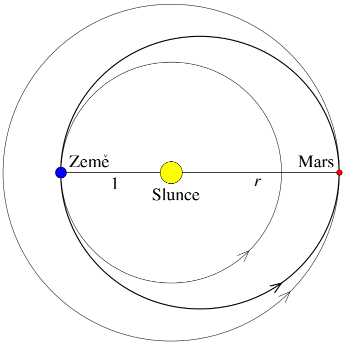
[9]) Budeme-li chtít udělit pozemskému tělesu rychlost v_3 vzhledem ke Slunci, pak využijeme toho, že těleso má již rychlost (10). Zvětšit jeho rychlost o $v_3 - v = 12{,}3$ km/s ale nestačí, protože se těleso ještě potřebuje vymanit z gravitačního pole Země, na což je nutná alespoň rychlost v_2. Aby těleso opustilo sluneční soustavu, je třeba mu udělit ve směru pohybu Země přinejmenším rychlost $v_\infty = 16{,}4 \doteq (11{,}2^2 + 12{,}3^2)^{1/2}$ km/s, tzv. *perigeální rychlost.* Využívá se i rotace Země kolem vlastní osy.

[10]) Situace je ve skutečnosti mnohem složitější. Dráhy planet nejsou kruhové a nejsou ani v jedné rovině. Sonda musí nejprve dosáhnout 2. kosmické rychlosti vzhledem k Zemi, aby se vymanila z její přitažlivosti.

Poznamenejme ještě, že numerická excentricita dráhy sondy je rovna

$$e = \frac{1}{2}(r-1)/r = 0{,}172.$$

.



Obr. 1. Ekonomická dráha sondy ze Země na Mars využívá skutečnosti, že Země se pohybuje kolem Slunce rychlostí (10). Sondu je třeba vypustit během tzv. startovacího okna, aby dosáhla dráhy Marsu v oblasti, kde se Mars bude právě nacházet.

K Plutu by se podobným způsobem letělo ze Země 46 roků. Proto byla pro sondu New Horizons, vypuštěnou k Plutu v roce 2006, zvolena jiná dráha, využívající přitažlivosti Jupitera (tzv. gravitační prak), což umožní dosáhnout Pluta již v roce 2015, tedy za pouhých 9 roků od vypuštění.

7. Platí gravitační zákon mimo sluneční soustavu? V roce 1780 William Frederick Herschel[11]) zjistil, že hvězda ξ UMa v souhvězdí Velké medvědice je vizuální dvojhvězdou. Francouzský matematik a astronom Felix Savary jejím dlouhodobým systematickým pozorováním objevil kolem roku 1827, že obě

[11]) Slavný anglický astronom, objevitel planety Uran, mnoha komet, infračerveného záření aj. Odhadl výkon Slunce s přesností na několik procent.

složky kolem sebe obíhají po eliptických drahách, které lze popsat pomocí Newtonova gravitačního zákona. Šlo tak vlastně o první potvrzení platnosti tohoto zákona mimo sluneční soustavu.[12]) Později to vedlo i k přesvědčení, že fyzikální zákony platí v celém vesmíru stejně.

Savary v tomto případě určil celkovou hmotnost soustavy pomocí modifikovaného 3. Keplerova zákona (srov. (6)) takto:

$$M + m \cong \frac{\alpha^3}{\gamma^3 T^2} \cong 1{,}84\, M_\odot,$$

kde $T = 59{,}8$ let je perioda oběhu, $\alpha = 2{,}53''$ je velikost hlavní poloosy relativní dráhy,[13]) $\gamma = 0{,}135''$ je tzv. roční paralaxa soustavy (viz [7], [10]) vyjádřená také v obloukových vteřinách a součet $M + m$ je pak vyjádřen v hmotnostech Slunce (7).

8. Jak určit vzdálenost exoplanet od jejich mateřských hvězd? Hvězda 51 Peg má hmotnost[14]) $M = 1{,}05\, M_\odot$. V důsledku Dopplerova jevu spektrální čáry hvězdy vykazují nepatrné opakující se změny o délce periody 4,231 dne (viz [12, s. 47]). Tak byla v r. 1995 objevena první planeta mimo naši sluneční soustavu, tzv. exoplaneta. Její doba oběhu je $T = 4{,}231/365{,}256$ let. Je od nás ovšem vzdálena 45 bilionů kilometrů, a proto nelze stanovit velikost poloosy její oběžné dráhy pomocí úhlových měření a standardních trigonometrických vztahů. Kombinací (4) a (6) však zjistíme, že

$$a \cong \sqrt[3]{1{,}05\, T^2} \cong 0{,}052 \text{ AU}.$$

Exoplaneta tedy obíhá svou mateřskou hvězdu mnohem blíže než Merkur Slunce. Jak odhadnout zdola její hmotnost, se uvádí např. v [12].

9. Jak odhadnout hmotnost supermasivní černé díry? Ve středu naší Galaxie vzdáleném 26 tisíc světelných let se nachází obří černá díra. Hvězda S2 ji oběhne po eliptické dráze s hlavní poloosou a jednou za 15,2 let. Pomocí úhlových měření se zjistilo, že pozorovaná dráha (tj. projekce skutečné dráhy) má délku hlavní poloosy $\overline{a} = 9 \cdot 10^{10}$ km. Ze (4) pak dostaneme dolní odhad hmotnosti černé díry

$$M_\bullet = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \geqq \frac{4\pi^2 \overline{a}^3}{GT^2} = 1{,}9 \cdot 10^{36} \text{ kg},$$

který je podle (7) přibližně milion hmotností Slunce $M_\odot$. V [5] ukazujeme, jak lze z Pythagorovy věty a vzorce pro řešení kvadratické rovnice odvodit, že $a \doteq 14 \cdot 10^{10}$ km a že $M_\bullet$ je kolem 4 milionů hmotností Slunce.

10. Závěr. Přestože Newtonův gravitační zákon popisuje chování planet na krátkých časových škálách poměrně dosti přesně, nesmíme zapomínat, že jde jen o matematický model. Ten popisuje fyzikální realitu pouze přibližně.

Podle Commitee on Data for Science and Technology je gravitační konstanta v jednotkách SI rovna

$$6{,}67428 \pm 0{,}00067 \cdot 10^{-11}.$$

[12]) Dnes víme, že ξ UMa je alespoň čtyřnásobná hvězda. Je od nás vzdálena cca 27 světelných let. Její obě hlavní složky mají hmotnost srovnatelnou se Sluncem.

[13]) Dráha jedné složky vůči druhé, kterou považujeme za pevnou. Je to elipsa, v jejímž jednom ohnisku se nachází druhá složka.

[14]) Ze vzdálenosti hvězdy $d = 15{,}4$ pc a pozorované hvězdné velikosti $\mathbf{m} = 5{,}49$ mag lze zjistit tzv. absolutní hvězdnou velikost $\mathbf{M} = \mathbf{m} + 5 - 5 \log d = 4{,}55$ mag a odtud lze odhadnout hmotnost M (nezaměňovat s $\mathbf{M}$). Pro srovnání uveďme, že absolutní hvězdná velikost Slunce je jen o trochu větší: 4,71 mag.

Nejistota v určení gravitační konstanty (2) je tedy značná. Je to vůbec nejhůře změřená fundamentální konstanta přírody. To má ale negativní dopad na většinu výpočtů dlouhodobých předpovědí v nebeské mechanice. Např. velká poloosa eliptické dráhy nějakého tělesa je podle (4) rovna

$$a = \left(\frac{T^2GM}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

a odhad její skutečné velikosti tak podstatně závisí na přesném určení G, resp. součinu GM, který většinou známe na více platných míst. Dobu oběhu lze obvykle změřit dosti přesně.

Také není jasné, jak vůbec definovat skutečné těžiště soustavy dvou či více těles o nestejných hmotnostech, když rychlost gravitační interakce nebyla zatím změřena.

Pro více těles, která na sebe vzájemně gravitačně působí, lze ze zákona síly a (1) odvodit soustavu diferenciálních rovnic[15]) popisujících jejich trajektorie [6]. Přitom se souřadnice planet (či jiných těles) uvažují tam, kde planetu vidíme, a ne tam, kde se právě nachází, i když Newtonova teorie předpokládá nekonečnou rychlost šíření gravitačního působení. Např. světlo z Jupitera k nám letí v průměru 45 minut a za tu dobu se podle (9) posune Jupiter o přibližně 35 000 km. Tato chyba se ale v průběhu výpočtu neustále kumuluje, což na dlouhých časových intervalech působí problémy.

Pokud navíc provádíme numerické simulace na miliony nebo dokonce miliardy let dopředu (či nazpět), pak nemá příliš smysl z nich dělat nějaké důležité předpovědi, jak se občas stává. Numerické výsledky totiž záleží na chybě použité numerické metody, zaokrouhlovacích chybách, použitém počítači, ale i na programovacím jazyku či na způsobu naprogramování.

Newtonův gravitační zákon přesto významně napomáhá k pochopení struktury a vývoje vesmíru. Při rozvoji fyziky sehrál naprosto zásadní roli.

Poděkování. Autor děkuje doc. RNDr. L. Dvořákovi, CSc., a Mgr. V. Pravdovi, Ph.D., za cenné připomínky. Práce byla podpořena grantem IAA 100190803 GA AV ČR.

[15]) Tato soustava nesplňuje známé Carathéodoryho podmínky a má řadu nerealistických řešení (viz např. [4], [8]).

Literatura

[1] Bertotti, B., Farinella, P., Vokrouhlický, D.: *Physics of the Solar system.* Kluwer, Dordrecht, 2003.

[2] Clotfelter, B. E.: *The Cavendish experiment as Cavendish knew it.* Amer. J. Phys. *55* (1987), 210–213.

[3] Kopal, Z.: *Hmota o hustotě jedné miliardy.* Říše hvězd *17* (1936), 56–59.

[4] Kropáč, A.: *Pozoruhodná řešení problému N těles.* PMFA *48* (2003), 308–315.

[5] Křížek, F., Křížek, M., Šolc, J.: *How massive is the black hole in the centre of our Galaxy?* Obzory mat. fyz. inf. *36* (2007), č. 1, 43–51, PMFA *49* (2004), 104–113.

[6] Křížek, M.: *O problému tří těles.* Rozhledy mat.-fyz. *70* (1992), 105–112.

[7] Křížek, M.: *Význam úhlových měření při poznávání vesmíru.* PMFA *51* (2006), 147–162.

[8] Saari, D. G., Xia, Z. J.: *Do nekonečna v konečném čase.* PMFA *42* (1997), 90–102.

[9] Seydl, O.: *K stému výročí objevení planety Neptuna.* Říše hvězd *27* (1946), 178–184.

[10] Šolc, M. a kol.: *Fyzika hvězd a vesmíru.* SPN, Praha, 1983.

[11] Vrecion, I.: *K čemu lze upotřebiti 3. Keplerův zákon.* Říše hvězd *1* (1920), 54.

[12] Wolf, M.: *Extrasolární planety.* PMFA *50* (2005), 44–61.