

MICHAL KŘÍŽEK
KAREL SEGETH

Numerické modelování problémů elektrotechniky



PRAHA 2001

Katedra numerické matematiky
Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze

Vedoucí katedry: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

© Michal Křížek, Karel Segeth, Praha 2001
© Univerzita Karlova v Praze - Nakladatelství Karolinum
ISBN 80-246-0287-3

PŘEDMLUVA

Tato skripta vznikla jako doprovodný text k naší přednášce Numerické modelování problémů elektrotechniky, kterou už několik let vedeme na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy.

Přednáška má připravit posluchače, zejména posluchače numerické matematiky a matematického modelování, na praktické situace, kdy budou nuceni provádět analýzu problémů a rozličné konkrétní výpočty v oblasti modelování elektrotechnických úloh.

Skripta předpokládají znalost matematické analýzy a numerické matematiky v rozsahu běžného kursu. Řešení úloh, o nichž se ve skriptech hovoří, je uvedeno nejen jako algoritmus nebo odkaz na algoritmus (většinou metodu konečných prvků), ale zpravidla se dokazují i jeho základní vlastnosti.

Skripta vznikla jako výsledek dlouhodobé spolupráce při výpočtu inženýrských problémů pro podniky ČKD-Elektrotechnika Praha, Výzkumný ústav silnoproudé elektrotechniky Praha, TESLA-Výzkumný ústav A. S. Popova Praha a ŠKODA Plzeň.

Kapitoly 1–9 sepsal první autor a kapitoly 10–14 druhý autor. Práce na skriptech byla podpořena granty č. 201/98/0528 a 201/01/1200 GA ČR.

Autoři děkují prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc., doc. RNDr. Karlu Najzarovi, CSc., Mgr. Vojtěchu Pravdovi, Ph.D., Mgr. Aleně Pravdové, Ph.D., a RNDr. Tomáši Vejchodskému a studentům 4. ročníku MFF UK Karlu Kolmanovi a Karlu Švadlenkovi za cenné připomínky. Dále děkují Mgr. Heleně Holovské za sestavení věcného rejstříku a Pavlu Křížkovi za nakreslení některých obrázků.

Praha 20. 01. 2001

Michal Křížek

Karel Segeth

OBSAH

Předmluva	3
Obsah	5
Úvodní slovo	7
1. Matematické modelování fyzikálních jevů	9
2. Stručný úvod do funkcionální analýzy	17
3. Metoda konečných prvků	26
4. Výpočet nelineárního stacionárního magnetického pole	45
5. Stacionární úloha sálání tepla	63
6. Nelineární anizotropní vedení tepla v magnetickém obvodu transformátorů	76
7. Nestacionární vedení tepla ve statoru točivých strojů	92
8. Řešení časově periodických Maxwellových rovnic	106
9. Stacionární rovnice pro popis polovodiče	114
10. Výpočetní realizace modelu polovodičové součástky	125
11. Bilanční metoda	134
12. Aposteriorní odhady chyby řešení eliptických úloh	147
13. Aposteriorní odhady chyby řešení parabolických úloh	164
14. Tlumená Newtonova metoda pro řešení soustav nelineárních rovnic	172
Literatura	187
Věcný rejstřík	190

ÚVODNÍ SLOVO

Mnoho oblastí vědy a techniky se stále více opírá o matematiku a její teoretické výsledky. V tomto procesu hrají důležitou roli zvláště numerické metody. V současnosti je *metoda konečných prvků* (MKP) považována za jednu z nejefektivnějších numerických metod pro řešení problémů matematické fyziky, tj. problémů popsaných diferenciálními, integro-diferenciálními a integrálními rovnicemi, systémy těchto rovnic, variačními nerovnicemi, systémy algebro-diferenciálních rovnic apod. Typickými příklady jsou parciální diferenciální rovnice popisující magnetický, elektrický či gravitační potenciál, Schrödingerova rovnice, rovnice vedení tepla, systém Maxwellových rovnic, Navierovy-Stokesovy rovnice proudění, Einsteinovy rovnice obecné relativity apod.

MKP se rozvíjela zejména během posledních padesáti let. Její objev se zpravidla připisuje Richardu Courantovi v roce 1943. Nicméně v práci [8], str. 5, jsou ještě starší odkazy na metody podobné MKP. První monografie o MKP vyšla již v roce 1957 – viz [57]. Zde je uveden původní důkaz interpolačních vlastností spojitých a po částech lineárních funkcí nad triangulovanou rovinnou oblastí. Pojem *prvek* byl zaveden v padesátých letech leteckými inženýry, kteří prováděli pružnostní a pevnostní výpočty a dělili kontinuum na malé části nazývané prvky. Pojem *konečný prvek* byl matematikami zaveden později, a to až v šedesátých letech. Od té doby se metoda konečných prvků začala důkladně a rigorózně studovat. Tato epocha představuje jednu z nejdůležitějších vývojových etap v historii numerické matematiky.

Hlavní výhodou MKP je to, že umožňuje simulovat řadu fyzikálních procesů na počítači. Tak může nahradit výrobu nákladných technických modelů (prototypů) nebo provádění komplikovaných měření. Například při návrhu rozmanitých elektrických zařízení můžeme pomocí MKP vypočítat elektromagnetické pole, rozložení teploty či mechanického napětí.

Obrovský pokrok byl učiněn ve vývoji software pro MKP. Celý výpočetní proces může být podstatně zautomatizován tak, že umožňuje provedení následujících kroků:

1. interpolace vstupních dat,
2. generování triangulací,
3. sestavení soustavy algebraických rovnic,
4. vyřešení soustavy algebraických rovnic,
5. zhlednutí numerického řešení,
6. aposteriorní odhady chyby,
7. grafické znázornění výsledků.

Skutečné technické problémy se často řeší pomocí standardních souborů programů, např. ABAQUS, ALGOR, ANSYS, COSMOS, ELLPACK, I-DEAS FEM, INTERLIB, LUSAS, MARC, MATLAB, ME-

CHANICA, MODULEF, MSC/PROBE, MSC/ NASTRAN, NISA, NONSAP, PAFEC, PATRAN, PLTMG, STRIPE, STRUDL, SYSTUS, TPS10. Uživatel ale obvykle neví, jakou metodu zvolil použitý soubor programů např. pro numerickou integraci, pro řešení diskrétního problému či pro aproximaci rozličných nelinearit.

Zřejmě neexistuje obecná numerická metoda, která by umožňovala řešit jakýkoliv nelineární problém. A tak každá třída nelineárních problémů se musí vyšetřovat individuálně. To zpravidla zahrnuje důkaz existence (popř. jednoznačnosti) přesného a přibližného řešení, otázky konvergence, stability, spojitě závislosti řešení na datech úlohy a dále numerické řešení přibližného problému, což většinou představuje řešení velkých řídkých lineárních či nelineárních soustav algebraických rovnic. Přibližné řešení parciálních diferenciálních rovnic tak stále představuje velkou výzvu pro numerické matematiky

Hlavním cílem těchto skript je ukázat, proč je užitečné se zabývat Hilbertovými prostory, větami o vnoření, slabou konvergencí, monotónními operátory, kompaktními množinami apod. při řešení skutečných technických problémů. Doufáme také, že bude patrné, proč je důležité se věnovat materiálové anizotropii, nehomogenitám, různým nelinearitám a komplikované geometrii elektrických strojů a zařízení, což jsou problémy, které se nevyskytují při řešení akademických příkladů s Laplaceovým operátorem na čtverci či kruhu.

1. MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ FYZIKÁLNÍCH JEVŮ

1.1. Obecný pohled na matematické modelování

Pojem „fyzika“ vznikl z řeckého slova „fysis“ (příroda). Fyzika vyšetřuje základní přírodní jevy, a tak fyzikální vědění má velmi obecný charakter. To je také důvod, proč fyzika proniká do ostatních odvětví, elektroinženýrství nevyjímaje.

Fyzikální jevy jsou přímými důsledky tří základních typů sil (gravitační, elektroslabé a silné interakce). Abychom pozorovaným jevům a jejich vzájemným vztahům lépe porozuměli, snažíme se je popisovat vhodnými matematickými prostředky – hovoříme o tzv. matematickém modelování. Používáme např. teorii diferenciálních a integrálních rovnic, teorii grup, teorii pravděpodobnosti. V těchto skriptech se budeme zabývat jevy, jež vznikají v elektroinženýrství a které lze modelovat pomocí diferenciálních či algebraických rovnic (nebo nerovnic). Poznamenejme, že takové matematické modely vždy představují jen jistou idealizaci fyzikální reality. Proto nikdy nesmíme ztotožňovat jakýkoliv fyzikální jev s jeho matematickým popisem. To se často v praxi stává a vede pak k nedorozumění nebo nesprávné interpretaci získaných výsledků.

Jak již zdůrazňoval velký francouzský matematik Henri Poincaré, původ všech rovnic (nerovnic) v modelu by měl být znám. O každém vztahu obsaženém ve vyetřovaném modelu bychom tedy vždy měli vědět, zda je to

- definice (označení, dohoda),
- předpoklad (hypotéza, axiom),
- tvrzení (důsledek, dedukce),
- vztah získaný z pokusu (měření, pozorování).

Při matematickém modelování fyzikálních jevů bychom měli mít na paměti několik důležitých skutečností. Předně bychom si měli uvědomit, že žádná fyzikální rovnice (kromě definičních rovnic) neplatí zcela přesně. Vesmír je totiž složen z elementárních částic a jejich chování může být předpovídáno vždy jen s určitou pravděpodobností (v důsledku Heisenbergova principu neurčitosti a Bornovy interpretace vlnové funkce). Proto jakákoliv fyzikální rovnice může pouze přibližně popisovat realitu. A tak každý model v sobě zahrnuje řadu zjednodušení.

Nejběžnější zjednodušení je tzv. kontinuální (spojitý) přístup, kdy jsou diskrétní částice našeho světa nahrazeny spojitými veličinami. Ukažme si jej kupříkladu na popisu teploty nějakého odlitku. Ačkoliv je teplota projevem pohybu atomů a molekul, není nutné sestavit model na této mikroúrovni. Elementárních částic tvořících odlitek je totiž takové obrovské množství a jsou tak drobné, že je téměř nemyslitelné se

jimi jednotlivě zabývat. Proto si teplotu v daném bodě představujeme jako veličinu úměrnou střední kinetické energii neuspořádaného pohybu částic v malém okolí tohoto bodu. Teplota je pak funkce definovaná v každém bodě odlitku, tedy i mezi dvěma atomy, a odlitek je na makroúrovni nahrazen idealizovanou souvisle rozloženou hmotou (kontinuem). Tato myšlenka nám umožňuje použít teorii diferenciálních rovnic, jak uvidíme v následujícím paragrafu.

Idealizace fyzikální skutečnosti má tedy především za úkol zjednodušit její zkoumání. Přesný popis i zdánlivě jednoduché fyzikální situace může totiž vést k natolik spleťitému matematickému modelu, že jeho detailní sestavení (a natož jeho vyřešení) je zcela nemožné. Pro názornost to ilustrujeme dalším příkladem.

Chceme co možno nejpresněji určit, za jak dlouho spadne na zem kámen vržený vzhůru určitou rychlostí z předem zadané výšky. Každý si jistě z Newtonova zákona síly snadno odvodí vzorec, v němž bude výška kamene nad zemí kvadratickou funkcí času. Ti rafinovanější „zlepší“ tento vztah např. tím, že do něj zabudují speciální teorii relativity. Do dobrého modelu by ovšem měl být zahrnut i odpor vzduchu, který závisí na tlaku vzduchu, tvaru a rychlosti (popř. rotaci) kamene a ještě mnoha dalších veličinách, které lze obtížně přesně matematicky vyjádřit. A co gravitační vliv Měsíce a dalších těles? Nebo zakřivení prostoročasu, závislost gravitační síly na výšce nad Zemí, vítr, Coriolisova síla apod. Jistě lze nalézt i mnoho dalších skutečností, které ovlivňují pohyb kamene, i když jejich účinek je velice malý. Nyní je snad zřejmé, že matematický model, který by zahrnoval všechny vlivy (včetně nárazů jednotlivých molekul vzduchu na kámen), nelze vytvořit. Této skutečnosti se však nesmíme zaleknout, neboť i jednoduchý matematický model může velice dobře vystihnout důležitý jev (např. Ohmův či Coulombův zákon). Tím se od sestavování modelů dostáváme k dalšímu závažnému kroku.

Jedním z nejdůležitějších požadavků modelování je zabývat se věrohodností modelů. To vyžaduje zejména vyšetřit otázku existence řešení navrženého matematického modelu. Mnohé v praxi běžně používané modely bývají tak složité, že se nám jejich řešení většinou nepodaří vyjádřit nějakými vzorci. Například pro rovnice popisující rozložení teploty v tělese nelze obecně řešení explicitně napsat ve tvaru nějakého vzorce, ale přesto umíme dokázat, že řešení existuje. A pouze když řešení existuje, má smysl je numericky aproximovat a ptát se, jak daleko jsme od reality. Uvažujme například počáteční úlohu

$$y(0) = 0 \text{ a } y'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y(x) \leq 0, \\ -1 & \text{pro } y(x) > 0. \end{cases}$$

Její řešení neexistuje, protože pravá strana není Darbouxovská funkce (tj. obor jejích hodnot není interval). Avšak jakákoliv numerická metoda použitá na tento problém nám dá nějaké numerické výsledky, které ovšem budou absurdní.

Modelové problémy založené na různých fyzikálních zákonech a vyšetřované v těchto skriptech jsou klasicky popsány pomocí parciálních diferenciálních rovnic s jistými okrajovými, popř. počátečními, podmínkami. Je známo, že nemusí mít řešení, pokud např. koeficienty rovnice mají skoky. Z tohoto důvodu budeme vyšetřovat tzv. slabou (zobecněnou, variační) formulaci těchto problémů, která má integrální podobu. Poznamenejme, že integrální podoba jakéhokoliv fyzikálního zákona je mnohem přirozenější než jeho diferenciální podoba. Slabá formulace nám navíc umožňuje využít účinných prostředků funkcionální

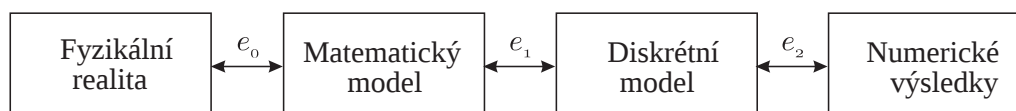
analýzy a použít metodu konečných prvků. Na rozdíl od klasických metod (jako např. metody kolokací, metody konečných diferencí, ...), obvykle žádné dodatečné předpoklady na hladkost přesného řešení nebudou požadovány.

Při prověřování spolehlivosti matematického modelu je také účelné studovat jednoznačnost (popř. násobnost) řešení. To také hraje důležitou roli při návrhu vhodné numerické metody pro nalezení přibližného řešení. Jednoznačnost řešení nemusí být zaručena, zejména když model odpovídá nějakému nelineárnímu vztahu. Existují rovnice, které mají více řešení, ale třeba jen jedno z nich má dobrý fyzikální smysl. Jednoznačnost takového řešení se pak v matematickém modelu zaručuje dodatečnými podmínkami. Víceznačnost řešení také není nic neobvyklého. Například tyristor může být v několika různých vnitřních stavech při určitém neměnném rozložení napětí na jeho vývodech. Rovnice modelující tento jev mají více řešení (viz [36], str. 43). Jiný příklad na nejednoznačnost řešení je uveden např. v [20], str. 209.

Jakmile máme existenci (popř. jednoznačnost) přesného řešení, je rozumné vyšetřovat spojitou závislost řešení na datech a aproximační vlastnosti modelu, tj. zda model popisuje fyzikální jev přiměřeně. Tento krok se většinou prověřuje konkrétními měřeními.

Vhodnou kontrolou při prověřování správnosti modelu je též rozměrová zkouška (tj. ověření, zda jednotky fyzikálních veličin obsažených v modelu jsou ve vzájemném souladu). Ta sice nemůže potvrdit, že je vyšetřovaný model správně, ale může napovědět, kdy je model určité špatně.

Modely vyšetřované v těchto skriptech jsou striktně deterministické, zatímco žádný fyzikální jev není striktně vzato deterministický. Tato skutečnost nás nemusí příliš znepokojovat, protože pro praktické použití vždy vystačíme jen s nějakým přibližným řešením. Obecné výpočetní schéma je znázorněno na obr. 1.1.



Obr. 1.1

Protože žádná rovnice nepopisuje fyzikální realitu přesně, dopouštíme se chyby e_0 (tzv. chyba modelu). Matematické modely jsou často popsány pomocí nekonečněrozměrných problémů. Ty se dále aproximují konečněrozměrnými problémy, aby je bylo možno zpracovat na počítači, což dává další chybu e_1 (to je tzv. diskretizační chyba). Tato chyba může zahrnovat chybu metody konečných prvků, chybu numerické integrace, chybu aproximace křivočaré hranice pomocí polygonu, chybu aproximace různých nelinearit, počátečních či okrajových podmínek apod. Konečně chyba e_2 vzniká v průběhu vlastního výpočtu. Samozřejmě zahrnuje zaokrouhlovací chyby, ale může obsahovat i iterační chybu, pokud používáme nějakou iterační metodu k řešení diskretizovaného problému. Poznamenejme, že numerická matematika se zabývá studiem chyb e_1 a e_2 , ale nikoliv chyby e_0 .

Rozdíl mezi přesným řešením matematického modelu a jeho numerickou aproximací lze občas odhadnout pomocí tzv. aposteriorních odhadů chyby (srov. par. 3.4 a kap. 12 a 13). Tento krok je velice

důležitý, protože skutečné technické problémy jsou většinou nelineární, špatně podmíněné, nestabilní a velkého rozměru. Mají násobná řešení, singularity apod. Pokud neprovedeme spolehlivou aposteriorní analýzu chyby, nevíme vlastně, jak daleko je numerické řešení od přesného řešení.

Na závěr poznamenejme, že nikdy nesmíme přeceňovat samu matematiku. Nezapomínejme, že matematika je pouze „hra“, i když tato hra má přesně definované pojmy a pravidla. Matematické modely byly, jsou a budou vyvíjeny především pro lepší pochopení světa. Matematika je tedy účinný nástroj k poznávání přírody, se kterým je ale třeba zacházet opatrně. Je důležité umět citlivě odhadnout, jaké vlivy do matematického modelu zahrnout a jaké zanedbat. A hlavně, než se pustíme do řešení nějakého konkrétního problému, je důležité si dobře rozmyslet, co budeme dělat s jeho řešením.

1.2. Některé modely popsané diferenciálními rovnicemi

Jedním z největších fyzikálních objevů jsou bezesporu *Maxwellovy rovnice* pro popis elektromagnetického pole,

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} &= \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, & (\text{Ampèreův zákon}) \\
 \operatorname{rot} \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, & (\text{Faradayův zákon}) \\
 \operatorname{div} \mathcal{D} &= \rho, & (\text{Poissonův zákon}) \\
 \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0, \\
 \mathcal{D} &= \varepsilon \mathcal{E}, \\
 \mathcal{B} &= \mu \mathcal{H}.
 \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\mathcal{H}$ je intenzita magnetického pole, $\mathcal{E}$ je intenzita elektrického pole, $\mathcal{D}$ je elektrická indukce, $\mathcal{B}$ je magnetická indukce, $\mathcal{J}$ je proudová hustota, ρ je hustota náboje, μ je permeabilita, ε je permitivita, $\partial(\cdot)/\partial t$ označuje časovou derivaci, diferenciální operátory divergence a rotace jsou klasicky definovány pro $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ takto:

$$\begin{aligned}
 (1.2) \quad \operatorname{div} v &= \sum_{i=1}^3 \partial_i v_i, \\
 (1.3) \quad \operatorname{rot} v &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)^T,
 \end{aligned}$$

kde $\partial_i v_j = \partial v_j / \partial x_i$ pro $i = 1, 2, 3$, a $(\cdot)^T$ označuje transponovaný vektor. Skriptem psané symboly v (1.1) jsou vyhrazeny pro trojrozměrné vektory závislé na třech prostorových proměnných x_1, x_2, x_3 a na čase t , tj. např. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, t)$. Funkce ρ je skalární, zatímco ε a μ mohou být skaláry anebo symetrické matice typu 3×3 v případě anizotropního prostředí. Mohou navíc záviset i na dalších veličinách (ne jen na prostorových a časových proměnných). Například $\mu = \mu(\mathcal{B})$, což znamená, že vztah $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$ může být nelineární (srov. (4.17)).

Z (1.2) a (1.3) je patrné, že soustava (1.1) obsahuje 8 parciálních diferenciálních rovnic a 6 algebraických rovnic. Protože $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$, rovnice v (1.1) nejsou nezávislé. Matematická teorie elektromagnetického

pole se zabývá hledáním řešení těchto rovnic. K tomuto účelu se předepisují ještě jisté počáteční a okrajové podmínky.

Předpokládejme nyní, že všechny funkce v soustavě (1.1) jsou časově nezávislé. Tuto skutečnost budeme označovat symboly psané kurzívou, tj. $B(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, t)$. Pak se (1.1) rozpadne na dvě menší vzájemně nezávislé soustavy

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0, \\ \operatorname{div} D &= \rho, \\ D &= \varepsilon E \end{aligned}$$

a

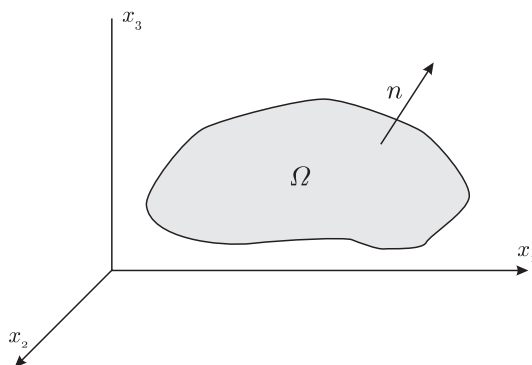
$$(1.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= J, \\ \operatorname{div} B &= 0, \\ B &= \mu H. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že (1.4) obsahuje jen elektrické veličiny E a D , zatímco (1.5) obsahuje magnetické veličiny H a B . Systém (1.5) budeme vyšetřovat v kapitole 4. Časově periodickými Maxwellovými rovnicemi se budeme zabývat v kapitole 8.

Dále představíme jinou důležitou rovnici používanou při matematickém modelování mnoha fyzikálních jevů – rovnici kontinuity (spojitosti). Necht' S je nějaká fyzikální veličina, jako například hmota, náboj či teplo. Potom platí

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\text{objemová hustota } S) \, dx = \int_{\Omega} (\text{objemová hustota zdrojů } S) \, dx - \int_{\partial\Omega} n^T (\text{povrchová hustota toku } S) \, ds,$$

kde Ω je oblast s hranicí $\partial\Omega$ a n je vnější jednotková normála (viz obr. 1.2). Levá strana (1.6) představuje časovou změnu S . První integrál na pravé straně popisuje zdroje veličiny S v Ω a druhý integrál popisuje tok veličiny S hranicí $\partial\Omega$.



Obr. 1.2
13

Uvažujme výše uvedenou rovnici v případě, kdy S je teplo, a označme symboly Q objemovou hustotu tepla, f objemovou hustotu tepelných zdrojů a q tepelný tok. Funkce Q a f jsou skalární, zatímco q je vektorová funkce. Poznamenejme, že tepelné zdroje mohou být zapříčiněny (realizovány) elektrickými proudy, střídavými elektromagnetickými poli, chemickými reakcemi apod. Známa Greenova formule nyní dává

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q \, dx = \int_{\partial\Omega} n^T q \, ds,$$

což společně s (1.6) implikuje, že

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} \, dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q \, dx = \int_{\Omega} f \, dx - \int_{\partial\Omega} n^T q \, ds = \int_{\Omega} f \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{div} q \, dx.$$

Protože tento vztah platí pro jakýkoliv objem Ω , dostaneme diferenciální rovnici

$$(1.7) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = f - \operatorname{div} q,$$

kteřá se nazývá *rovnice kontinuity*. Tato rovnice se ve stacionárním případě, tj.

$$\operatorname{div} q = f,$$

někdy také nazývá *rovnice rovnováhy*.

Objemová hustota tepla Q splňuje vztah

$$(1.8) \quad Q = c\rho u,$$

kde ρ je hustota, c je specifická tepelná kapacita a u je teplota. Necht' jsou tyto skalární funkce nezávislé na čase. Podle *Fourierova zákona* je tepelný tok přímo úměrný gradientu teploty $\operatorname{grad} u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)^T$, tj.

$$(1.9) \quad q = -\mathcal{A} \operatorname{grad} u.$$

Zde $\mathcal{A}$ je skalární funkce pro izotropní prostředí a v případě anizotropního prostředí je to symetrická matice typu 3×3 . Může také záviset na teplotě, jak uvidíme v kapitole 6. V takovém případě je Fourierův zákon nelineární. Dosadíme-li (1.8) a (1.9) do (1.7), dostáváme následující parciální diferenciální rovnici parabolického typu, která popisuje nestacionární vedení tepla

$$(1.10) \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) = f.$$

V kapitole 7 předepíšeme jisté počáteční a okrajové podmínky pro tuto rovnici.

Pokud všechny funkce vystupující v (1.10) jsou časově nezávislé, dostáváme

$$(1.11) \quad -\operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) = f.$$

Tato rovnice je eliptického typu a popisuje stacionární (ustálené) vedení tepla. V kapitolách 3, 5 a 6 předepíšeme několik různých okrajových podmínek pro rovnici (1.11).

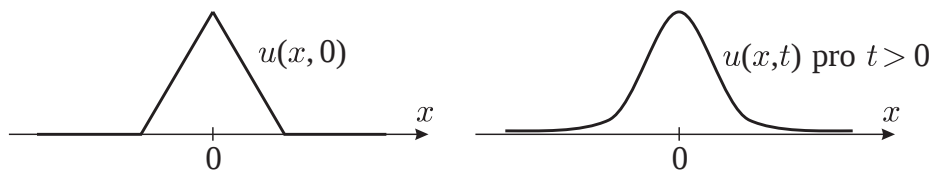
Uvažujme nyní řešení $u = u(x, t)$ rovnice (1.10) pro $x \in (-\infty, \infty)$, $c = \rho = \mathcal{A} = 1$ a $f = 0$. Na obr. 1.3 je znázorněna počáteční teplota pro $t = 0$ a odpovídající teplota pro libovolně malý čas $t > 0$. Vidíme, že rychlost šíření tepla modelovaná rovnicí (1.10) je nekonečná, i když u je extrémně malé pro $|x| \gg 0$. Abychom tuto obtíž překonali, můžeme místo (1.9) uvažovat Cattaneoův-Maxwellův zákon

$$(1.12) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\tau^{-1}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u + q),$$

kde τ je daná konstanta (tj. $\tau \approx 10^{-11} - 10^{-9}$ [s] pro kovové materiály). Tento vztah je přesnější než Fourierův zákon (1.9). Diferenciací (1.7) vzhledem k t dostaneme pomocí (1.8), (1.12) a opět (1.7) rovnici hyperbolického typu

$$(1.13) \quad \tau \frac{\partial}{\partial t} \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) = f + \tau \frac{\partial f}{\partial t}.$$

V tomto případě lze ukázat, že rychlost šíření tepla je konečná. Vidíme, že (1.13) pro $\tau \rightarrow 0$ přechází v (1.10). Rovnici (1.13) se však v těchto skriptech nebudeme zabývat (pro její numerické řešení viz [29]).



Obr. 1.3

Široký rozvoj polovodičových technologií přináší vzrůstající zájem o matematické a také numerické modelování polovodičových součástek. Stručně si proto představíme soustavu polovodičových rovnic pro MOS-tranzistor (Metal-Oxide-Semiconductor). Proud mezi kolektorem a emitorem (viz obr. 1.4) je řízen napětím na hradle, což je řídicí elektroda. Úplný dynamický systém MOS-tranzistoru je popsán soustavou 10 parciálních diferenciálních rovnic v trojrozměrném prostoru a čase. Osm z nich jsou Maxwellovy rovnice (1.1) a zbývající dvě jsou rovnice kontinuity (srov. (1.7)) pro proudové hustoty děr a elektronů.

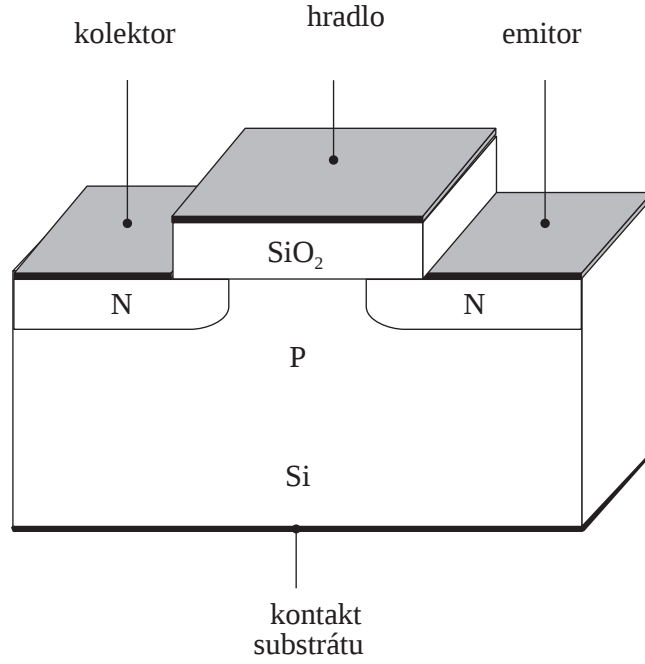
Omezme se pro jednoduchost jen na stacionární případ (srov. (1.4) a (1.5)). V tomto případě je vliv magnetického pole zcela nepatrný. Jestliže jej zanedbáme, pak chování MOS-tranzistoru lze popsat systémem tří parciálních diferenciálních rovnic. První z nich je pro elektrostatický potenciál u_0 ,

$$(1.14) \quad -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u_0) = q(F + P - N),$$

a druhá, resp. třetí, rovnice vyjadřuje spojitost proudových hustot J_P děr, resp. proudových hustot J_N elektronů,

$$(1.15) \quad -\operatorname{div} J_P = qR,$$

$$(1.16) \quad -\operatorname{div} J_N = -qR,$$



Obr. 1.4

kde J_P , resp. J_N , závisí na koncentraci P děr, resp. koncentraci N elektronů, takto:

$$(1.17) \quad J_P = q\mu_P P \text{ grad } u_P,$$

$$(1.18) \quad J_N = -q\mu_N N \text{ grad } u_N.$$

Zde a výše q označuje elementární náboj, F je úměrné čisté hustotě ionizovaných příměsí, ε je permitivita, μ_P , resp. μ_N , je pohyblivost děr, resp. elektronů, u_P , resp. u_N , je elektrochemický potenciál děr, resp. elektronů, funkce R charakterizuje rozdíl mezi rychlostí, kterou se páry díra-elektron nesoucí náboje rekombinují, a rychlostí, kterou jsou v polovodiči generovány.

Poznámka 1.1. Vektor $E = -\text{grad } u_0$ je elektrické pole, pro něž platí $\text{rot } E = 0$, což je jedna ze stacionárních Maxwellových rovnic v (1.4). Ta spolu s rovnicí pro divergenci E dává (1.14).

Existuje několik modelů popisujících rozdělení koncentrací nosičů. Jestliže například uvažujeme Boltzmannovo rozdělení (tj. Boltzmannovu statistiku), pak

$$(1.19) \quad P = N_I e^{(u_P - u_0)/U}, \quad N = N_I e^{(u_N + u_0)/U},$$

kde N_I je hustota vnitřních nosičů a U je tepelné napětí (viz [36], str. 25, [68]). Nyní z (1.14)–(1.19) dostaneme následující nelineární systém pro neznámé u_0 , u_P a u_N ,

$$(1.20) \quad \begin{aligned} -\text{div}(\varepsilon \text{ grad } u_0) &= q(F + N_I e^{(u_P - u_0)/U} - N_I e^{(u_N + u_0)/U}), \\ -\text{div}(\mu_P N_I e^{(u_P - u_0)/U} \text{ grad } u_P) &= R, \\ -\text{div}(\mu_N N_I e^{(u_N + u_0)/U} \text{ grad } u_N) &= R. \end{aligned}$$

V kapitolách 9 a 10 budeme studovat zjednodušenou verzi soustavy (1.20) se smíšenými okrajovými podmínkami.

2. STRUČNÝ ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

Cílem této kapitoly je v krátkosti připomenout některé definice a věty z funkcionální analýzy, které budeme často používat v dalších kapitolách.

Množina V se nazývá *lineární vektorový prostor*, jestliže má následující vlastnosti: Jsou-li $v, w \in V$ libovolné prvky a α je reálné (nebo komplexní) číslo, pak $v + w$ a αv také patří do V ; tyto operace navíc splňují běžná algebraická pravidla:

$$\begin{aligned} v + w &= w + v, & v + (w + z) &= (v + w) + z, \\ \alpha(v + w) &= \alpha v + \alpha w, & (\alpha + \beta)v &= \alpha v + \beta v, \\ \alpha(\beta v) &= (\alpha\beta)v, & 1 \cdot v &= v, \\ \text{jestliže } v + w &= v + z, & \text{pak } w &= z. \end{aligned}$$

Lineárními vektorovými prostory nad tělesem komplexních čísel se budeme zabývat v kapitole 8.

Nechť V je lineární vektorový prostor. *Norma* na V je reálná funkce označená symbolem $\|\cdot\|_V$, která splňuje následující podmínky:

$$(2.1) \quad \|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V \quad (\text{trojúhelníková nerovnost}),$$

$$(2.2) \quad \|\alpha v\|_V = |\alpha| \|v\|_V,$$

$$(2.3) \quad \|v\|_V \neq 0 \quad \text{pro } v \neq 0$$

pro každé $v, w \in V$ a každý skalár α (skalárem rozumíme reálné nebo komplexní číslo). Z (2.1) a (2.2) snadno plyne, že norma je nezáporná funkce na V , tj. $\|v\|_V \geq 0$ pro každé $v \in V$. Lineární vektorový prostor, který je opatřen normou, se nazývá *normovaný lineární vektorový prostor*.

Připomeňme, že *Banachův prostor* V je normovaný lineární vektorový prostor, který je úplný, tj. pro každou cauchyovskou posloupnost $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset V$ existuje prvek $v \in V$ tak, že

$$\|v_j - v\|_V \rightarrow 0 \quad \text{pro } j \rightarrow \infty.$$

Definice 2.1. Nechť V, U jsou Banachovy prostory. Řekneme, že T je lineární operátor z V do U , jestliže

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$

a

$$T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

pro každé $v, w \in V$ a každý skalár α .

Lineární operátor $T : V \rightarrow U$ je proto spojitý, jestliže existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$(2.4) \quad \|Tv\|_U \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Symboly C, C_1, C_2 jsou nadále rezervovány pro *generické konstanty*, které jsou kladné. Nemusí být stejné při každém svém výskytu a nezávisí na odhadovaných funkcích ani na diskretizačním parametru, který zavedeme později.

Nechť V je lineární vektorový prostor a necht' α^C označuje číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu α . *Skalární (vnitřní) součin* na $V \times V$ je komplexní funkce označená $(\cdot, \cdot)_V$, která splňuje následující podmínky:

$$(2.5) \quad (v + y, w)_V = (v, w)_V + (y, w)_V,$$

$$(2.6) \quad (\alpha v, w)_V = \alpha(v, w)_V,$$

$$(2.7) \quad (v, w)_V = ((w, v)_V)^C \quad \text{a} \quad (v, v)_V \geq 0,$$

$$(2.8) \quad (v, v)_V \neq 0 \text{ pro } v \neq 0,$$

pro každé $v, w, y \in V$ a každý skalár α . Jestliže V je reálný prostor (tj. prostor nad tělesem reálných čísel), pak $(\cdot, \cdot)_V$ je reálná funkce a symbol $(\cdot)^C$ v (2.7) může být vynechán.

Pro tzv. *indukovanou normu*

$$(2.9) \quad \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}, \quad v \in V,$$

platí známá *Cauchyova-Schwarzova nerovnost*

$$(2.10) \quad |(v, w)_V| \leq \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Navíc

$$\|v\|_V = \sup_{w \neq 0} \frac{|(v, w)_V|}{\|w\|_V}.$$

Lineární operátor, jehož hodnoty jsou skaláry, se nazývá *lineární forma* nebo *lineární funkcionál*. Banachův prostor se skalárním součinem se nazývá *Hilbertův prostor*.

Věta 2.2. (*Rieszova věta.*) *Nechť V je Hilbertův prostor. Pak pro každý lineární spojitý funkcionál F definovaný na V existuje právě jeden prvek $u \in V$ takový, že*

$$(2.11) \quad F(v) = (v, u)_V \quad \forall v \in V.$$

Důkaz viz [60], str. 245.

Připomeňme, že skalární zobrazení $a(\cdot, \cdot)$ definované na $V \times V$, kde V je lineární vektorový prostor, se nazývá *sesquilineární forma*, jestliže pro každé pevné $v \in V$ jsou zobrazení $a(\cdot, v)$ a $(a(v, \cdot))^C$ lineární. Jestliže je navíc $a(\cdot, \cdot)$ reálné zobrazení, pak $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *bilineární forma*. Sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *spojitá*, jestliže existuje konstanta $C_1 > 0$ tak, že

$$(2.12) \quad |a(v, w)| \leq C_1 \|v\|_V \|w\|_V \quad \forall v, w \in V.$$

Lemma 2.3. (*Laxovo-Milgramovo lemma.*) Necht' V je Hilbertův prostor a necht' $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá sesquilineární forma, pro niž existuje konstanta $C_2 > 0$ taková, že

$$(2.13) \quad |a(v, v)| \geq C_2 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V \text{ (podmínka } V\text{-eliptičnosti)}.$$

Pak pro každý lineární spojitý funkcionál F definovaný na V existuje právě jeden prvek $u \in V$ tak, že

$$(2.14) \quad a(v, u) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Důkaz viz [41], str. 38. Laxovo-Milgramovo lemma nám vlastně říká, že $\sqrt{|a(\cdot, \cdot)|}$ je norma na V ekvivalentní normě $\|\cdot\|_V$.

Sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ se nazývá *hermitovská*, jestliže

$$(2.15) \quad a(v, w) = (a(w, v))^C \quad \forall v, w \in V.$$

Věta 2.4. Necht' jsou splněny předpoklady lemmatu 2.3, necht' sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je hermitovská a $a(v, v) \geq 0$ pro všechna $v \in V$. Pak je úloha (2.14) ekvivalentní úloze: Najít $u \in V$ tak, že

$$(2.16) \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v),$$

kde J je kvadratický funkcionál daný vztahem

$$(2.17) \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \operatorname{Re}(F(v)), \quad v \in V.$$

D ů k a z . Funkcionál (2.17) zřejmě nabývá jen reálných hodnot. Necht' u je řešením (2.14). Potom z (2.17), (2.15) a ze sesquilinearity $a(\cdot, \cdot)$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2J(v) &= a(v, v) - F(v) - (F(v))^C = a(v, v) - a(v, u) - a(u, v) \\ &= a(v - u, v - u) - a(u, u) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Nyní z (2.13) vidíme, že J nabývá minima právě pro $v = u$, protože poslední člen $-a(u, u)$ je konstantní.

Necht' naopak funkcionál (2.17) nabývá minima v bodě $u \in V$ a necht' $v \in V$ je libovolné. Na reálné ose definujme reálnou funkci $j(t) = J(u + tv)$. Pak pro $t \neq 0$ platí

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{j(t) - j(0)}{t} &= \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \\ &= \frac{a(u, u) + ta(u, v) + ta(v, u) + t^2a(v, v) - a(u, u)}{2t} - \frac{\operatorname{Re}(F(u + tv)) - \operatorname{Re}(F(u))}{t}. \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $t \rightarrow 0$ dostaneme

$$2j'(0) = a(u, v) + a(v, u) - 2\operatorname{Re}(F(v)) = a(v, u) - F(v) + (a(v, u) - F(v))^C = 0,$$

tj.

$$\operatorname{Re} a(v, u) = \operatorname{Re} F(v) \quad \forall v \in V.$$

Pro libovolné $w \in V$ nyní položíme $v = iw$. Potom

$$\operatorname{Im} a(w, u) = -\operatorname{Re} ia(w, u) = -\operatorname{Re} iF(w) = \operatorname{Im} F(w) \quad \forall w \in V,$$

a tedy platí (2.14). Úlohy (2.14) a (2.16) jsou tudíž ekvivalentní. $\square$

Poznámka 2.5. Funkcionál (2.17) se nazývá *energetický funkcionál*. Poznamenejme, že v reálném případě se vztah (2.15) redukuje na $a(v, w) = a(w, v)$ a odpovídající bilineární forma se pak nazývá *symetrická*.

Nechť $\mathbb{R}^d$ je *euklidovský prostor* opatřený normou

$$(2.19) \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^d x_j^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d.$$

Skalární součin v $\mathbb{R}^d$ budeme označovat $(\cdot, \cdot)$ nebo pro jednoduchost někdy jen „ $\cdot$ “.

Lebesgueův prostor reálných nebo komplexních funkcí definovaných na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, které jsou integrovatelné s mocninou $p \in [1, \infty)$, označíme $L^p(\Omega)$ a opatříme normou

$$(2.20) \quad \|v\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |v|^p dx \right)^{1/p}, \quad v \in L^p(\Omega).$$

Pokud $p = 2$, budeme pro stručnost psát $\|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{0,2,\Omega}$ a definovat skalární (vnitřní) součin takto:

$$(v, w)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} vw^C dx.$$

Připomeňme si ještě známou Hölderovu nerovnost

$$\left| \int_{\Omega} vw dx \right| \leq \|v\|_{0,p,\Omega} \|w\|_{0,q,\Omega}, \quad v \in L^p(\Omega), \quad w \in L^q(\Omega),$$

která platí pro každé $p, q \in (1, \infty)$ splňující rovnost

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lebesgueův prostor měřitelných a skoro všude (s.v.) ohraničených skalárních funkcí na Ω je označen $L^\infty(\Omega)$ a opatřen normou

$$\|v\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname{ess} \sup_{x \in \Omega} |v(x)|.$$

Je-li Ω ohraničená, pak pro každé $p, q \in [1, \infty]$, $p \leq q$, platí následující algebraické vnoření

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

a také topologické vnoření, které lze charakterizovat takto: Existuje $C > 0$ tak, že

$$\|v\|_{0,p,\Omega} \leq C \|v\|_{0,q,\Omega} \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Symbolem $\overline{\Omega}$ označíme uzávěr Ω a necht' $\partial\Omega$ označuje hranici Ω . Pak zřejmě

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{R}^d \setminus \Omega).$$

Připomeňme, že *oblast* Ω je otevřená a souvislá množina v $\mathbb{R}^d$. Symbol $d \in \{1, 2, \dots\}$ bude nadále vyhrazen pro dimenzi $\mathbb{R}^d$.

Jestliže je Ω ohraničená oblast, pak prostor spojitých skalárních funkcí na $\overline{\Omega}$ označíme $C(\overline{\Omega})$ a opatříme normou

$$(2.21) \quad \|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Evidentně platí

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \|v\|_{0,\infty,\Omega} \quad \forall v \in C(\overline{\Omega}).$$

Symbol $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \{0, 1, \dots\}$, je vyhrazen pro prostor skalárních funkcí, jejichž klasické derivace až do řádu k jsou v Ω spojitě rozšiřitelné až do hranice, tj. patří do $C(\overline{\Omega})$. Navíc klademe

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$$

a říkáme, že $C^\infty(\overline{\Omega})$ je *prostor nekonečně diferencovatelných funkcí na $\overline{\Omega}$* . Konečně symbolem $C_0^\infty(\Omega)$ označíme *prostor nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v Ω* , tj.

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \text{supp } v \subset \Omega\},$$

kde

$$(2.22) \quad \text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\}}.$$

Slabá řešení řady úloh v elektroinženýrských a jiných problémech jsou definována v Sobolevových prostorech. Nejprve si stručně připomeňme některé základní vlastnosti Sobolevových prostorů $H^k(\Omega)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, tj. tříd reálných nebo komplexních funkcí definovaných na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, jejichž zobecněné derivace až do řádu k včetně patří do $L^2(\Omega)$. Budeme se zabývat pouze Sobolevovými prostory, které jsou definovány na ohraničených oblastech s lipschitzovsky spojitou hranicí, což je dostatečně široká třída oblastí pro praktické problémy. Následující definice pochází od Mazji (viz [37], str. 22).

Definice 2.6. Řekneme, že ohraničená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pro $d > 1$ má *lipschitzovsky spojitou hranici*, jestliže pro každé $z \in \partial\Omega$ existuje okolí $U = U(z)$ takové, že množina $U \cap \Omega$ může být vyjádřena v nějakém kartézském souřadnicovém systému $(x_1, \dots, x_d)$ nerovností $x_d < F(x_1, \dots, x_{d-1})$, kde F je lipschitzovsky spojitá funkce.

Označme $\mathcal{L}$ množinu všech ohraničených oblastí s lipschitzovsky spojitou hranicí.

Podle [41], str. 88, vnější normála k lipschitzovsky spojitě hranici existuje skoro všude. Tuto vlastnost využijeme např. při použití Greenovy věty nebo při zadávání Neumannových okrajových podmínek.

Nechť tedy nadále $\Omega \in \mathcal{L}$. Pro každé $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a tzv. *multiindex* $m = (m_1, \dots, m_d)$ definujeme *m-tou klasickou derivaci*

$$D^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_d^{m_d}},$$

kde $m_1, \dots, m_d$ jsou nezáporná přirozená čísla a

$$|m| = m_1 + \dots + m_d.$$

Řekneme, že funkce $v \in L^2(\Omega)$ má m -tou zobecněnou derivaci v $L^2(\Omega)$, jestliže existuje $z \in L^2(\Omega)$ tak, že

$$\int_{\Omega} zw \, dx = (-1)^{|m|} \int_{\Omega} v D^m w \, dx \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pak se funkce z nazývá *m-tá zobecněná derivace* funkce v a klademe $D^m v = z$. Snadno se můžeme přesvědčit (viz např. [32], str. 7), že symbol $D^m v$ je dobře definován.

Sobolevovy prostory $H^k(\Omega)$ pro $k = 0, 1, \dots$, se nyní definují takto:

$$H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid D^m v \in L^2(\Omega), \quad |m| \leq k\}.$$

Lze ověřit, že $H^k(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(2.23) \quad (v, w)_{k, \Omega} = \sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} D^m v (D^m w)^C \, dx, \quad v, w \in H^k(\Omega),$$

je Hilbertův prostor, kde symbol $(\cdot)^C$ označuje komplexně sdružené číslo. Dále zavedme indukovanou normu

$$(2.24) \quad \|v\|_{k, \Omega} = \left(\sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad v \in H^k(\Omega),$$

a seminormu

$$(2.25) \quad |v|_{k, \Omega} = \left(\sum_{|m|=k} \int_{\Omega} |D^m v|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad v \in H^k(\Omega).$$

Dolní index $_{\Omega}$ budeme často vynechávat, tj.

$$(\cdot, \cdot)_k = (\cdot, \cdot)_{k, \Omega}, \quad \|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{k, \Omega}, \quad |\cdot|_k = |\cdot|_{k, \Omega}.$$

Speciálně platí

$$\|v\|_1^2 = \|v\|_0^2 + \|\text{grad } v\|_0^2,$$

kde $\text{grad } v = (\partial_1 v, \dots, \partial_d v)^T$ je gradient funkce v . Zřejmě

$$\|v\|_{k-1} \leq \|v\|_k \quad \forall v \in H^k(\Omega), \quad k = 1, 2, \dots$$

a

$$L^2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \dots.$$

Poznamenejme, že každá klasická derivace je zároveň derivací zobecněnou, a proto máme

$$C^k(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega), \quad k = 0, 1, \dots.$$

Pro jednoduchost bude norma vektorové funkce označována stejným symbolem jako norma skalární funkce, tj.

$$\|v\|_k = \left(\sum_{l=1}^q \|v_l\|_k^2 \right)^{1/2} \quad \text{pro } v = (v_1, \dots, v_q)^T \in (H^k(\Omega))^q.$$

Definice 2.7. Množina $\Gamma \subset \partial\Omega$ se nazývá relativně otevřená v $\partial\Omega$, jestliže pro každé $x \in \Gamma$ existuje otevřená koule $B \subset \mathbb{R}^d$ obsahující x tak, že $B \cap \partial\Omega \subset \Gamma$.

Lebesgueův prostor měřitelných funkcí integrovatelných s kvadrátem na relativně otevřené množině $\Gamma \subset \partial\Omega$ označíme $L^2(\Gamma)$ a opatříme standardní normou

$$\|v\|_{0,\Gamma} = \left(\int_{\Gamma} |v|^2 ds \right)^{1/2}, \quad v \in L^2(\Gamma).$$

Dále si připomeňme některé důležité vlastnosti Sobolevových prostorů.

Věta 2.8. (Věta o stopách.) Předpokládejme, že $\Omega \in \mathcal{L}$. Pak existuje právě jeden lineární spojitý operátor $\gamma^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ takový, že

$$\gamma v = v \Big|_{\partial\Omega} \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Funkce γv pro $v \in H^1(\Omega)$ se nazývá stopou v a my ji budeme pro jednoduchost značit $v \Big|_{\partial\Omega}$. Věta 2.8 nám vlastně říká, že existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$(2.26) \quad \|v\|_{0,\partial\Omega} \leq C \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Věta o stopách nám umožňuje definovat prostor

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Poznamenejme, že prostor $H_0^1(\Omega)$, resp. $H^1(\Omega)$, může být také definován jako zúplnění $C_0^\infty(\Omega)$, resp. $C^\infty(\overline{\Omega})$, v normě $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, tj.

$$(2.27) \quad H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}, \quad H^1(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Označme symbolem $H^{1/2}(\partial\Omega)$ prostor stop všech funkcí z $H^1(\Omega)$. Pak platí následující tvrzení o hustotě (viz [41], str. 87)

$$(2.28) \quad L^2(\partial\Omega) = \overline{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

kde uzávěr je v normě $\|\cdot\|_{0,\partial\Omega}$.

Věta 2.9. (Rellichova věta.) Necht' $\Omega \in \mathcal{L}$. Pak identické zobrazení z $H^1(\Omega)$ do $L^2(\Omega)$ je kompaktní (tj. každá ohraničená posloupnost v $H^1(\Omega)$ obsahuje podposloupnost konvergující v $L^2(\Omega)$).

Věta 2.10. (Greenova věta.) Necht' $\Omega \in \mathcal{L}$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, d\}$ platí

$$(2.29) \quad \int_{\Omega} w \partial_i v dx + \int_{\Omega} v \partial_i w dx = \int_{\partial\Omega} n_i v w ds \quad \forall v, w \in H^1(\Omega),$$

kde n_i jsou složky vnější jednotkové normály $n = (n_1, \dots, n_d)^T$ k hranici $\partial\Omega$ a $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Věta 2.11. (Sobolevova věta o vnoření.) Necht' $\Omega \in \mathcal{L}$ a necht' k je přirozené číslo takové, že $2k > d$. Pak

$$(2.30) \quad H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$$

a existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$(2.31) \quad \|v\|_k \geq C\|v\|_{C(\overline{\Omega})} \quad \forall v \in H^k(\Omega).$$

Důkazy vět 2.8–2.11 lze nalézt např. v [34], [41].

Poznámka 2.12. Spojitost vyjádřená inkluzí (2.30) může být ještě zlepšena. Kupříkladu jestliže $d = 1$ a $v \in H^1((0, 1))$ je libovolné, pak (2.30), Cauchyova-Schwarzova nerovnost (2.10) aplikovaná na $L^2((0, 1))$ a (2.25) dávají

$$|v(z) - v(y)| = \left| \int_y^z v'(x) dx \right| \leq |z - y|^{1/2} \left(\int_y^z |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq |v|_1 |z - y|^{1/2},$$

$$\forall y, z \in (0, 1),$$

což znamená, že v je hölderovsky spojitá funkce s exponentem $\frac{1}{2}$.

Věta 2.13. (Friedrichsova nerovnost.) Jestliže $\Omega \in \mathcal{L}$ a $\Gamma \neq \emptyset$ je relativně otevřená podmnožina hranice $\partial\Omega$, pak

$$\|v\|_1 \leq C(|v|_1^2 + \|v\|_{0,\Gamma}^2)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Speciálně

$$(2.32) \quad \|v\|_1 \leq C|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Stručně si ještě připomeňme Sobolevovy prostory funkcí $W_p^k(\Omega)$, jejichž zobecněné derivace až do řádu $k \in \{0, 1, \dots\}$ patří do $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$. Pro $p < \infty$ jsou opatřeny normou

$$\|v\|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad v \in W_p^k(\Omega),$$

a seminormou

$$|v|_{k,p,\Omega} = \left(\sum_{|m|=k} \int_{\Omega} |D^m v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad v \in W_p^k(\Omega),$$

a pro $p = \infty$

$$\|v\|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|m| \leq k} \|D^m v\|_{0,\infty,\Omega}, \quad |v|_{k,\infty,\Omega} = \max_{|m|=k} \|D^m v\|_{0,\infty,\Omega}.$$

Opět budeme psát

$$\|\cdot\|_{k,p} = \|\cdot\|_{k,p,\Omega}, \quad |\cdot|_{k,p} = |\cdot|_{k,p,\Omega}.$$

Sobolevův prostor $W_p^k(\Omega)$ je zúplnění $C^\infty(\overline{\Omega})$ v normě $\|\cdot\|_{k,p}$. Sobolevovy prostory jsou Banachovy prostory a pro $p = 2$ se stávají Hilbertovými prostory, tj.

$$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega).$$

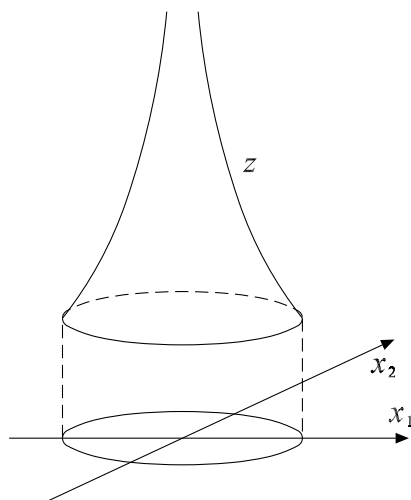
Sobolevova věta o vnoření pro $p \in [1, \infty]$ a $k \in \{1, 2, \dots\}$ má tvar

$$W_p^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \quad \text{pro } pk > d.$$

Poznamenejme, že podmínka $pk > d$ je pouze postačující, ale nikoliv nutná. Například pro $d = 2$ platí, že $W_1^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ (viz [34], str. 300), kdy podmínka $pk > d$ není splněna. Na druhé straně lze ukázat, že $W_2^1(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$ pro $d \geq 2$. Je-li $d = 2$, stačí vyšetřovat funkci (viz obr. 2.1)

$$z(x_1, x_2) = \left(-\ln\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{1/4}$$

na kruhu $x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4}$. Tato funkce není spojitá, protože má pól v bodě 0, ale patří do $H^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ (viz [32], str. 10).



Obr. 2.1

Více detailů o Sobolevových prostorech $W_p^k(\Omega)$ lze najít v monografiích [37] nebo [41].

3. METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Kromě osmé kapitoly se budeme nadále výhradně zabývat pouze reálnými funkcemi. V této kapitole stručně popíšeme některé základní myšlenky metody konečných prvků. Podrobnější popis je např. v monografiích [3], [8], [29].

3.1. Základní myšlenka metody konečných prvků

Omezíme se pro jednoduchost jen na řešení Poissonovy rovnice

$$(3.1) \quad -\Delta u = f \quad \text{v } \Omega$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$(3.2) \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde Ω je polyedrická oblast v $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) s hranicí $\partial\Omega$, $\Delta u = \partial_{11}u + \dots + \partial_{dd}u$ je Laplaceův operátor a $f \in L^2(\Omega)$ je daná funkce. Analytické řešení tohoto problému obecně není známo, a proto je třeba použít přibližných metod. Metoda konečných prvků (MKP) pro řešení úlohy (3.1)–(3.2) je založena na její slabé (variační) formulaci. K tomu účelu zavedeme prostor *testovacích funkcí*

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Vynásobíme-li (3.1) libovolnou funkcí $v \in V$, pak integrací přes Ω dostaneme pomocí (3.2) a Greenovy věty 2.10, že platí

$$(3.3) \quad (\text{grad } u, \text{grad } v)_0 = (f, v)_0 \quad \forall v \in V,$$

kde $(\cdot, \cdot)_0$ je standardní skalární součin na $(L^2(\Omega))^r$, $r = 1, 2, \dots$. Podle Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 zjistíme, že existuje právě jedno slabé řešení $u \in V$ splňující (3.3).

Nekonečněrozměrný problém (3.3) nyní nahradíme konečněrozměrným pomocí Galerkinovy metody. Necht' $V_h \subset V$ je neprázdný konečněrozměrný podprostor. Hledejme $u_h \in V_h$ takové, že

$$(3.4) \quad (\text{grad } u_h, \text{grad } v_h)_0 = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Protože V_h je zřejmě Hilbertův prostor, existence právě jednoho řešení $u_h \in V_h$ opět plyne z Laxova-Milgramova lemmatu 2.3.

Budeme-li hledat $u_h \in V_h$ jako lineární kombinaci bázevých funkcí $v^1, \dots, v^N$ prostoru V_h ($N = \dim V_h$),

$$(3.5) \quad u_h = \sum_{j=1}^N c_j v^j,$$

pak z (3.4) a (3.5) dostaneme soustavu lineárních algebraických rovnic pro neznámé $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}^1$,

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^N (\text{grad } v^i, \text{grad } v^j)_0 c_j = (f, v^i)_0, \quad i = 1, \dots, N,$$

jejíž matice je symetrická a pozitivně definitní. Avšak obecně je tato matice plná.

Metoda konečných prvků může být charakterizována jako speciální případ Galerkinovy metody, při níž je zvolen prostor V_h a jeho báze funkce tak, že matice

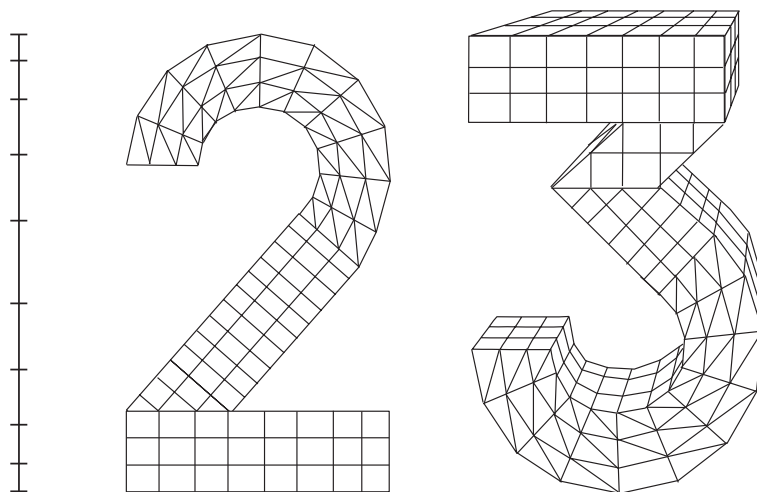
$$(3.7) \quad A = \left((\text{grad } v^i, \text{grad } v^j)_0 \right)_{i,j=1}^N$$

soustavy (3.6) je *řidká*, tj. jen $\mathcal{O}(N)$ prvků A je nenulových. To nám pak umožňuje vyřešit soustavu (3.6) mnohem rychleji než v případě plné matice. Navíc můžeme uchovat matici (3.7) s mnohem menšími nároky na paměť počítače než pro plné matice, které mají obecně $\mathcal{O}(N^2)$ nenulových prvků.

Poznamenejme, že matice (3.7) se v metodě konečných prvků tradičně nazývá *matice tuhosti*. Problémy lineární statiky, k jejichž řešení byla metoda konečných prvků prvně používána, vedou totiž na matice, které vyjadřují „tuhost“ – vztah mezi zatížením a odpovídající deformací tělesa.

Řidkosti matice tuhosti se dosahuje v následujících třech krocích:

- (i) Vytvoří se triangulace $\mathcal{T}_h$ uzávěru oblasti $\overline{\Omega}$ na jednodušší uzavřené podoblasti. Ty se nazývají prvky a jsou to obvykle úsečky, trojúhelníky, čtyřúhelníky, čtyřstěny, pětistěny (trojboké hranoly, pyramidy) nebo šestistěny (kvádry). Na obr. 3.1 vidíme triangulaci 1,2,3-rozměrné oblasti na prvky.



Obr. 3.1

- (ii) Prostor V_h se volí tak, že každá funkce $v_h \in V_h$ má velice jednoduchý tvar (většinou polynom) na každém prvku. Takový prostor se nazývá *prostorem konečných prvků*.
- (iii) Zvolí se báze $v^1, \dots, v^N$ ve V_h tak, že všechny báze funkce v^i mají „malé“ nosiče (tj. míra množiny, kde v^i je nenulová, musí být malá v porovnání s mírou Ω).

Pro ilustraci kroků (i)–(iii) představíme nejběžnější prostor spojitých a po částech lineárních funkcí pro $d = 2$. V tomto případě bude triangulace $\mathcal{T}_h$ konečná množina trojúhelníků takových, že

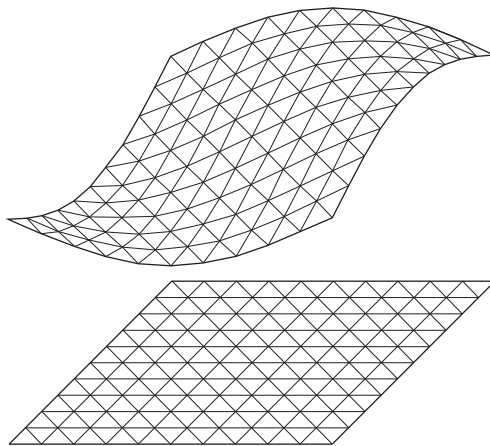
$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

a že každé dva různé trojúhelníky z $\mathcal{T}_h$ mají právě jednu společnou stranu nebo jeden společný vrchol nebo nemají žádný společný bod. Symbol h (tzv. diskretizační parametr) charakterizuje maximální průměr prvků v triangulaci $\mathcal{T}_h$.

Abychom splnili požadavek (ii), položíme

$$V_h = \{v_h \in V \mid v_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

kde $P_1(K)$ je prostor lineárních polynomů na trojúhelníku K . Poznamenejme, že funkce z V_h jsou spojité (viz větu 3.1). Obr. 3.2 ukazuje příklad takové funkce $v_h \in V_h$ nad triangulovanou oblastí.



Obr. 3.2

Abychom splnili nejdůležitější požadavek (iii), označíme $B_1, \dots, B_N \in \Omega$ vnitřní uzly (tj. vrcholy trojúhelníku) v triangulaci. Pak existuje báze $v^1, \dots, v^N$ prostoru V_h tak, že

$$(3.8) \quad v^i(B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{Kroneckerův symbol}).$$

Tyto funkce splňují (iii) a nazývají se Courantovy báze funkce. Typický tvar v^i odpovídající uzlu B_i pro $d = 2$ je znázorněn na obr. 3.3. V tomto případě je nosič v^i šestiúhelník složený ze šesti trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$. Je patrné, že když B_i a B_j ($i \neq j$) nejsou vrcholy stejného trojúhelníka, pak

$$(3.9) \quad (\text{grad } v^i, \text{grad } v^j)_0 = 0,$$

což zaručuje řidkost matice tuhosti (3.7). Očíslujme uzly B_i na obr. 3.3 po řádcích. Pak z (3.7) a (3.8) můžeme snadno odvodit (podrobnosti viz např. [32], str. 64), že matice tuhosti odpovídající jednoduché uniformní triangulaci z obr. 3.3 je symetrická tvaru

Sym

$$(3.10) \quad u_h(B_i) = \sum_{j=1}^N c_j v^j(B_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

Jak již bylo řečeno, řidkost matice A soustavy (3.6) snižuje nároky na paměť počítače a počet prováděných aritmetických operací. Na jednoduchém příkladu si nyní ukažme, proč je velmi důležité věnovat zvláštní pozornost výběru vhodné metody pro řešení soustavy (3.6).

Uvažujme rovnici (3.1) s homogenní okrajovou podmínkou $u + \partial u / \partial n = 0$ na krychli, kterou rozdělíme jen na $2 \times 2 \times 2 = 8$ menších krychlí a použijme jednoduché trilineární konečné prvky. Příslušné polynomy mají na každém prvku tvar

29

kde reálná čísla $\alpha_0, \dots, \alpha_7$ jsou jednoznačně určena hodnotami p ve vrcholech (uzlech) každé krychle. Tím získáme $3 \times 3 \times 3 = 27$ uzlových bodů, tj. $N = 27$ neznámých.

Pokud nevyužijeme řidkosti matice tuhosti a k řešení příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic použijeme nevhodnou metodu, nemusíme vůbec dojít k hledanému výsledku. Řešíme výslednou soustavu $N = 27$ rovnic např. Cramerovým pravidlem a příslušných $N + 1$ determinantů počítáme přímo z definice. Na každý z nich je třeba provést $N!$ násobení N čísel. Pomocí Stirlingova vzorce (viz [49])

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

snadno nalezneme následující dolní odhad počtu potřebných aritmetických operací

$$(N + 1)(N!)N \approx \sqrt{2\pi(N + 1)} \left(\frac{N + 1}{e}\right)^{N+1} N = \sqrt{56\pi} \left(\frac{28}{e}\right)^{28} 27 > 13 \cdot 10^{28} \cdot 27 > 10^{30}.$$

Protože dnešní počítače provádějí zhruba milion aritmetických operací za sekundu, potřebovali bychom k výpočtu alespoň 10^{24} sekund. Uvážíme-li však, že celkové stáří vesmíru je „jen“ $5 \cdot 10^{17}$ sekund ≈ 15 miliard let, zjistíme, že i na pouhých 8 konečných prvků jsou některé metody naprosto nevhodné.

Naproti tomu známá Gaussova eliminace, která využije řidkosti matice, potřebuje zhruba $\frac{1}{3}NM^2$ operací, kde $M = 14$ je šíře polopásu matice. Výpočet řešení soustavy lineárních algebraických rovnic se tak zvládne za nepatrný zlomek sekundy.

Pro soustavy lineárních algebraických rovnic o tisících neznámých se většinou používají iterační metody typu sdružených gradientů, které jsou nenáročné na paměť počítače (viz kapitulu 8). *Metodu sdružených gradientů* poprvé publikovali M. R. Hestenes a E. Stiefel v roce 1952. Tato metoda konverguje k řešení (3.6) v N krocích algoritmu. Dlouho zůstávala nepovšimnuta, protože vyžadovala provedení přibližně $2N^3$ operací pro „plné“ matice. Později se zjistilo, že metoda sdružených gradientů konverguje velice rychle (viz např. [33]), pokud je matice A pozitivně definitní, což je splněno nejen pro uvažovanou soustavu (3.6), ale i v řadě dalších technických aplikací.

Protože při použití metody konečných prvků je matice A řídká, metoda sdružených gradientů potřebuje řádově jen N paměťových buněk počítače. Výhodou také je, že se v průběhu celého výpočtu matice A nemění, zatímco při eliminaci se matice soustavy mění a pro $d > 1$ se ztrácí její řidkost.

3.2. Slabá formulace a její řešení metodou konečných prvků

Uvažujme klasickou lineární eliptickou úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) &= f & \text{v } \Omega, \\ u &= \bar{u} & \text{na } \Gamma_1, \\ n^T \mathcal{A} \operatorname{grad} u &= g & \text{na } \Gamma_2, \end{aligned}$$

kde $\Omega \in \mathcal{L}$, n je vnější jednotková normála, $\mathcal{A}$ je stejnoměrně pozitivně definitní symetrická matice, jejíž prvky jsou v $C^1(\overline{\Omega})$, $\Gamma_1 \neq \emptyset$ a Γ_2 jsou disjunktní relativně otevřené množiny v $\partial\Omega$ takové, že $\overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} = \partial\Omega$, a f , $\bar{u}$ a g jsou spojité funkce.

Pokud oblast Ω není konvexní, klasické řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$ této úlohy nemusí existovat. Rovněž pro smíšené okrajové podmínky klasické řešení většinou neexistuje. Z tohoto důvodu představíme slabou formulaci. Její výhodou oproti klasické formulaci je to, že řešení ve vhodných prostorech existuje a je jediné. Veškeré integrály vystupující ve slabé formulaci mají dobrý smysl a jsou konečné, i když koeficienty mají skoky (což je z praktického hlediska velice častý případ). Proto budeme dále předpokládat, že prvky matice $\mathcal{A}$ jsou v $L^\infty(\Omega)$ a že $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ a $g \in L^2(\Gamma_2)$. Navíc slabá formulace obsahuje jen první derivace, které se z numerického hlediska mnohem lépe aproximují než derivace druhé (jako např. při použití známé metody konečných diferencí).

Slabá formulace klasické úlohy spočívá v nalezení u tak, že

$$u - \bar{u} \in V$$

a

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

kde

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$$

je prostor testovacích funkcí a

$$\begin{aligned} a(v, w) &= \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T \mathcal{A} \text{grad } w \, dx, \quad v, w \in H^1(\Omega), \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds, \quad v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Forma $a(., .)$ je zřejmě bilineární a spojitá a F je lineární spojitý funkcional. Z Friedrichsovy nerovnosti (viz větu 2.13) plyne, že $a(., .)$ je V -eliptická forma. Existenci a jednoznačnost řešení u dostaneme snadno z Laxova-Milgramova lemmatu 2.3. Protože je forma $a(., .)$ lineární v obou proměnných, píšeme z tradičních důvodů opačné pořadí proměnných u a v , než jak uvádí Laxovo-Milgramovo lemma. Tento způsob zápisu budeme používat ve všech kapitolách kromě kapitoly 8, kde se vyšetřuje komplexní případ.

Řešení předchozího problému metodou konečných prvků spočívá v nalezení u_h takového, že

$$u_h - \bar{u} \in V_h$$

a

$$(3.11) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde

$$V_h = \{v_h \in V \mid v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

je prostor konečných prvků a kde P_K je nějaký konečněrozměrný prostor funkcí definovaných na prvku K . Poznamenejme, že u_h nemusí být ve V_h . Nicméně předchozí problém může být ekvivalentně vysloven takto: Nalézt $u_h^0 \in V_h$ tak, že

$$a(u_h^0, v_h) = F(v_h) - a(\bar{u}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Z Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 dostaneme jediné řešení u_h^0 , a pak položíme $u_h = u_h^0 + \bar{u}$.

V tomto paragrafu dále stručně popíšeme, jak konstruovat podprostory V_h prostoru V . Pokud platí inkluze $V_h \subset V$, říkáme, že metoda konečných prvků (3.11) je konformní.

Nejprve stanovíme *triangulaci* $\mathcal{T}_h$ na množině $\bar{\Omega}$. Rozdělíme $\bar{\Omega}$ na konečný počet podoblastí (nazývaných *prvky*) tak, že platí následující podmínky:

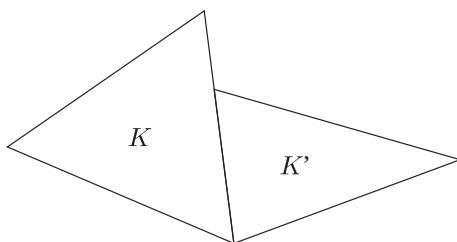
- (1) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$,
- (2) každé $K \in \mathcal{T}_h$ je uzavřená množina, jejíž vnitřek K^0 je neprázdný,
- (3) pro každé dva různé prvky $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ platí $K_1^0 \cap K_2^0 = \emptyset$,
- (4) každé $K \in \mathcal{T}_h$ má lipschitzovsky spojitou hranici ∂K .

Triangulace se také někdy nazývá rozklad, dělení, síť, prostorová diskretizace či mříž.

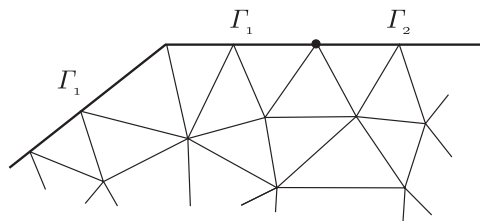
Nadále se budeme zabývat prvky, které jsou konvexní. Pro $d = 2, 3$ je pak $\bar{\Omega}$ mnohoúhelník nebo mnohostěn. V tomto případě přidáme další dva předpoklady:

- (5) každá strana, popř. stěna, $K \in \mathcal{T}_h$ je buď podmnožinou hranice $\partial\Omega$ nebo stranou, popř. stěnou, jiného prvku $K' \in \mathcal{T}_h$,
- (6) vnitřek každé strany, popř. stěny, $K \in \mathcal{T}_h$ je disjunktní s $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2$.

Z předpokladu (5) je patrné, že situace z obr. 3.4 se nepřipouští. Předpoklad (6) se nazývá *podmínka konzistence* pro smíšené okrajové podmínky (viz obr. 3.5).



Obr. 3.4



Obr. 3.5

I když jsou prvky uzavřené oblasti, budeme pro jednoduchost psát $H^k(K)$ místo $H^k(K^0)$. Dále uvedeme jednu velice důležitou větu.

Věta 3.1. *Nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, která se skládá z konvexních prvků. Nechť V_h je podprostor $L^2(\Omega)$ takový, že*

$$P_K = \{v_h|_K \mid v_h \in V_h\}$$

obsahuje polynomiální funkce pro každé $K \in \mathcal{T}_h$. Potom

$$V_h \subset H^1(\Omega) \iff V_h \subset C(\bar{\Omega}),$$

tj. po částech polynomiální funkce je z $H^1(\Omega)$ právě tehdy, když je spojitá.

Důkaz založený na Greenově větě lze nalézt v [32], str. 27. Skutečnost, že $v_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$ je spojitá funkce, přesněji řečeno znamená, že třída ekvivalence v_h obsahuje spojitou funkci mezi všemi svými prvky.

Abychom zajistili spojitost funkcí z V_h , použijeme koncept konečných prvků. *Konečný prvek* je trojice (K, P_K, Σ_K) , kde K je uzavřená množina $\mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem a lipschitzovsky spojitou hranicí, P_K je m -rozměrný prostor funkcí definovaných na K a Σ_K je množina m lineárně nezávislých lineárních funkcí definovaných na prostoru, který obsahuje P_K . Tyto funkcionály se nazývají *stupně volnosti* (nebo parametry) konečného prvku.

Dále budeme používat zejména *Lagrangeovy konečné prvky*, pro něž je odpovídající prostor P_K tvořen polynomy definovanými na konvexní množině $K \subset \mathbb{R}^d$. Jejich stupně volnosti jsou tvaru $p \mapsto p(B)$ pro $p \in P_K$ a $B \in K$. Bod B se nazývá *uzel*. Předpokládejme nyní, že $B_1, \dots, B_m$ jsou dané uzly v K . Pak Lagrangeův konečný prvek (K, P_K, Σ_K) se nazývá *P_K -unisolventní*, jestliže pro dané $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $m = \dim P_K$, existuje právě jeden polynom $p \in P_K$ tak, že

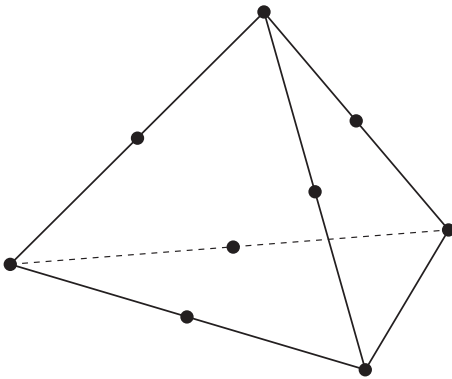
$$p(B_i) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Na obr. 3.6 vidíme příklad kvadratického čtyřstěnného konečného prvku s 10 stupni volnosti.

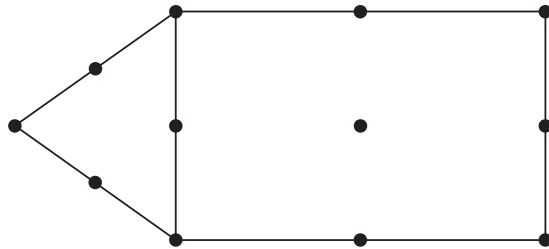
Chceme-li napojit sousední mnohoúhelníkové (mnohostěnné) prvky $(K_1, P_{K_1}, \Sigma_{K_1})$ a $(K_2, P_{K_2}, \Sigma_{K_2})$, potřebujeme navíc, aby platilo

$$(3.12) \quad \{p^1|_S \mid p^1 \in P_{K_1}\} = \{p^2|_S \mid p^2 \in P_{K_2}\},$$

kde $S = K_1 \cap K_2$ je jejich společná strana či stěna. Uzly musí být zvoleny tak, že když uzly obou prvků na S splývají (viz obr. 3.7), pak je rovnost (3.12) splněna (srov. (3.13)).



Obr. 3.6



Obr. 3.7

Nechť P_S označuje prostor polynomiálních funkcí z P_K zúžený na stranu, popř. stěnu, S prvku K a nechť $\mathcal{N}_S$ je množina uzlů na S . Navíc předpokládejme, že

$$(3.13) \quad p \in P_S, \quad p(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{N}_S \implies p = 0 \quad \text{na } S.$$

Položme

$$\mathcal{N}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}_K,$$

kde pro každý konečný prvek (K, P_K, Σ_K) symbol $\mathcal{N}_K$ označuje množinu uzlů. Odpovídající prostor konečných prvků je dán vztahem

$$X_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}) \mid v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Tudíž funkce v_h z prostoru X_h je jednoznačně určena množinou

$$\Sigma_h = \{v_h(B) \mid B \in \mathcal{N}_h\},$$

kteřá se nazývá *množina stupňů volnosti* prostoru X_h . Pro spojitou funkci $v \in C(\overline{\Omega})$ nyní můžeme definovat *interpolaci* $\pi_h v \in X_h$ vztahem

$$(3.14) \quad (\pi_h v)(B) = v(B) \quad \forall B \in \mathcal{N}_h.$$

Pomocí věty 3.1 a podmínky konzistence (6) můžeme definovat podprostor konečných prvků prostoru $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$ rovností

$$V_h = \{v_h \in X_h \mid v_h(B) = 0 \quad \text{pro } B \in \mathcal{N}_h \cap \overline{\Gamma}_1\}.$$

Toto je skutečně podprostor prostoru V , neboť $v_h = 0$ na Γ_1 , jak plyne z (3.13).

Abychom splnili požadavek (iii) z paragrafu 3.1, zvolíme bázi $\{v^i\}_{i=1}^N \subset V_h$ podobně jako v (3.8) tak, aby $v^i(B_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$, kde $N = \dim V_h$, $B_i \in \mathcal{N}_h$ a $B_i \notin \overline{\Gamma}_1$.

Ukažme si ještě, že matice tuhosti (srov. (3.7))

$$A = (a(v^i, v^j))_{i,j=1}^N$$

je regulární. Protože je forma $a(\cdot, \cdot)$ bilineární a V -eliptická, platí

$$\begin{aligned} (A\xi, \xi) &= \sum_{i,j} a(v^i, v^j) \xi_i \xi_j = a\left(\sum_i \xi_i v^i, \sum_j \xi_j v^j\right) = a(v, v) \\ &\geq C_2 \|v\|_V^2 > 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{R}^N, \quad \xi \neq 0, \end{aligned}$$

kde $v = \sum_i \xi_i v^i$ a $v \neq 0$, protože $\{v^i\}$ je báze a $\xi \neq 0$. Tudíž homogenní rovnice $A\xi = 0$ nemůže mít netriviální řešení $\xi \neq 0$.

Je-li $a(\cdot, \cdot)$ symetrická, pak je A Gramova matice, protože je tvořena skalárními součiny bázevých funkcí. Tato matice je evidentně symetrická a také pozitivně definitní, neboť $(A\xi, \xi) > 0$ pro všechna $\xi \neq 0$.

Přibližné řešení u_h definované (3.11) je zřejmě nezávislé na volbě bázevých funkcí $v^1, \dots, v^N \in V_h$, neboť je jediné. Na druhé straně struktura matice A na volbě $v^1, \dots, v^N$ podstatně závisí.

V knížce [32] jsou uvedeny dva algoritmy pro sestavení matice tuhosti. Zde lze také najít formulky pro numerickou kvadraturu k přibližnému výpočtu integrálů $a(v^i, v^j)$.

3.3. Apriorní odhady chyby

Uvažujme problém: Najít $u \in V$ tak, že

$$(3.15) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

kde V , a , F splňují předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 2.3. Pro každý netriviální konečněrozměrný podprostor $V_h \subset V$ je odpovídající přibližné řešení $u_h \in V_h$ definováno rovnicí

$$(3.16) \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Předpokládejme, že existuje systém podprostorů $\{V_h\}$ takový, že

$$(3.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_V = 0,$$

kde $\|\cdot\|_V$ je norma Hilbertova prostoru V . Pak řekneme, že *odpovídající množina přibližných problémů je konvergentní*.

Lemma 3.2. (*Céovo lemma.*) *Nechť jsou splněny předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 2.3. Pak existuje konstanta $C > 0$ nezávislá na podprostorech V_h taková, že*

$$(3.18) \quad \|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

kde u , resp. u_h , je řešení úlohy (3.15), resp. (3.16). Tudíž postačující podmínka konvergence je ta, že existuje systém $\{V_h\}$ podprostorů prostoru V takový, že pro každé $v \in V$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0$$

(tj. sjednocení $\bigcup_{h>0} V_h$ je husté ve V vzhledem k normě $\|\cdot\|_V$).

D ů k a z . Nechť w_h je libovolný prvek ve V_h . Z (3.15) a (3.16) plyne, že

$$a(u - u_h, w_h) = 0.$$

Tudíž z V -eliptičnosti a spojitosti $a(\cdot, \cdot)$ pro každé $v_h \in V_h$ ($w_h = u - v_h$) platí

$$\begin{aligned} C_2 \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, u_h - v_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) \leq C_1 \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \end{aligned}$$

a (3.18) tak plyne pro $C = C_1/C_2$. $\square$

Jednoduchá nerovnost (3.18) ukazuje, že problém odhadu chyby $\|u - u_h\|_V$ se redukuje na následující úlohu z teorie aproximace: Odhadnout vzdálenost

$$\text{dist}(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

mezi funkcí $u \in V$ a podprostorem $V_h \subset V$. Pokud je přesné řešení dostatečně hladké, vzdálenost $\text{dist}(u, V_h)$ budeme umět odhadnout pomocí konstanty násobené h^q pro nějaký exponent $q > 0$ a dostatečně malé $h > 0$.

Definice 3.3. Množina triangulací $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ uzávěru $\overline{\Omega}$ se nazývá systémem triangulací, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ s $h < \varepsilon$.

Nechť navíc existuje $h_0 > 0$ a přirozená čísla k, q tak, že pro každé $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ s $h \in (0, h_0)$ platí, že

$$\|u - u_h\|_k \leq C(u)h^q ,$$

kde $C(u)$ nezávisí na h . Pak řekneme, že řád konvergence je q v normě $\|\cdot\|_k$. Někdy pro stručnost píšeme $\|u - u_h\|_k = \mathcal{O}(h^q)$ pro $h \rightarrow 0$.

Abychom dokázali konvergenci nebo dokonce řád (rychlost) konvergence metody konečných prvků, budeme navíc požadovat další vlastnost systému $\{\mathcal{T}_h\}$.

Definice 3.4. Systém triangulací $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ se nazývá regulární, jestliže existuje konstanta $\kappa > 0$ tak, že pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ a pro každý prvek $K \in \mathcal{T}_h$ je

$$\kappa h_K^d \leq \text{meas } K ,$$

kde $h_K = \text{diam } K$. Jestliže $\kappa h^d \leq \text{meas } K$, pak se systém triangulací nazývá silně regulární.

Poznámka 3.5. Zřejmě je každý silně regulární systém triangulací regulární. Není obtížné ukázat, že regularita systému triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ skládajících se z trojúhelníkových prvků je ekvivalentní Zlámalově podmínce na minimální úhel: Existuje konstanta α_0 tak, že

$$\alpha_K \geq \alpha_0 > 0$$

pro všechny trojúhelníky $K \in \mathcal{T}_h$ a všechny triangulace, kde α_K označuje nejmenší úhel K .

Věta 3.6. (Věta o interpolaci.) Nechť $\mathcal{F} = \{\mathcal{T}_h\}$ je regulární systém triangulací $\overline{\Omega}$ a nechť $v \in H^{k+1}(\Omega)$ pro nějaké přirozené číslo $k > d/2 - 1$. Pak existují konstanty $h_0, C > 0$ takové, že pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ s $h \in (0, h_0)$ platí

$$(3.19) \quad \|v - \pi_h v\|_1 \leq Ch^k |v|_{k+1} ,$$

kde $\pi_h v$ je interpolace funkce v definovaná vztahem (3.14).

Důkaz této věty lze nalézt např. v [8]. Ze Sobolevovy věty o vnoření 2.11 je v spojitá funkce, a proto je interpolace $\pi_h v$ korektně definována.

Věta 3.7. (Věta o rychlosti konvergence.) Nechť u , resp. u_h , je řešení úlohy (3.15), resp. (3.16), a nechť jsou splněny předpoklady věty o interpolaci 3.6 pro $v = u$. Pak existují konstanty $h_0, C > 0$ takové, že pro každou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ s $h \in (0, h_0)$ platí

$$(3.20) \quad \|u - u_h\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1} .$$

D ů k a z . Ze Céova lemmatu 3.2 a věty o interpolaci 3.6 ihned plyne, že

$$\|u - u_h\|_1 \leq C' \|u - \pi_h u\|_1 \leq Ch^k |u|_{k+1}. \quad \square$$

Pokud prvky matice $\mathcal{A}$ vystupující ve formě $a(.,.)$ jsou po částech konstantní funkce, slabé řešení u obecně není po částech z H^2 na příslušných podoblastech. Následující věta však udává postačující podmínku pro konvergenci metody konečných prvků bez jakýchkoliv dodatečných předpokladů na hladkost slabého řešení $u \in V \subset H^1(\Omega)$ úlohy (3.15). Toto řešení může mít singularity, a přesto metoda konečných prvků konverguje v normě $\|\cdot\|_1$, tj. hodnoty i všechny první zobecněné derivace konvergují v normě $L^2(\Omega)$.

Věta 3.8. (*Věta o konvergenci.*) *Necht' $\{\mathcal{T}_h\}$ je regulární systém triangulací $\overline{\Omega}$ a necht' prostor $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ je hustý ve V v normě $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_1$. Pak*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_1 = 0.$$

D ů k a z . Necht' $\varepsilon > 0$ je dáno. Z předpokladu o hustotě existuje $w \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ splňující nerovnost

$$\|u - w\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z věty o interpolaci 3.6 pro $\pi_h w \in V_h$ platí

$$\|w - \pi_h w\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ze Céova lemmatu 3.2, trojúhelníkové nerovnosti a obou předchozích nerovností plyne, že

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \|u - \pi_h w\|_1 \leq C (\|u - w\|_1 + \|w - \pi_h w\|_1) \leq C\varepsilon,$$

kde C závisí jen na bilineární formě $a(\cdot, \cdot)$. $\square$

Poznamenejme, že předpoklad o hustotě v předchozí větě je splněn např. pro $d = 2$ (viz [11], str. 618). Příklad $d = 3$ se zde také uvažuje za jistých podmínek na množinu $\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2$. Je-li $V = H^1(\Omega)$ nebo $V = H_0^1(\Omega)$, pak předpoklad o hustotě platí pro libovolné d .

Dále budeme vyšetřovat rychlost konvergence metody konečných prvků v normě $L^2(\Omega)$. K tomuto účelu představíme Aubinův-Nitscheův trik, při němž se chyba metody konečných prvků $u - u_h$ klade na pravou stranu jisté adjungované úlohy.

Věta 3.9. (*Aubinův-Nitscheův trik.*) *Necht' platí předpoklady věty 3.7, $d \leq 3$, slabé řešení z úlohy*

$$a(v, z) = (e, v)_0 \quad \forall v \in V$$

patří do $H^2(\Omega)$ pro každé $e \in L^2(\Omega)$ a necht'

$$(3.21) \quad |z|_2 \leq c \|e\|_0,$$

kde $c > 0$ nezávisí na e . Pak

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1}.$$

D ů k a z . Podle vztahu (2.30) je řešení z spojitá funkce pro $d \leq 3$. Položíme-li v adjungované úloze $v = e = u - u_h$ a odečteme-li (3.16) od (3.15) pro $v = v_h = \pi_h z$, pak

$$\begin{aligned} a(u - u_h, z) &= (u - u_h, u - u_h)_0, \\ a(u - u_h, \pi_h z) &= 0. \end{aligned}$$

Odečtením obou těchto rovnic, ze spojitosti $a(.,.)$, věty 3.6 o interpolaci a z předpokladu o regularitě (3.21) dostaneme

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0^2 &= a(u - u_h, z - \pi_h z) \leq C_1 \|u - u_h\|_1 \|z - \pi_h z\|_1 \\ &\leq C_2 \|u - u_h\|_1 h |z|_2 \leq C_3 h \|u - u_h\|_1 \|u - u_h\|_0. \end{aligned}$$

Čili

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_3 h \|u - u_h\|_1.$$

Zbytek důkazu nyní plyne z (3.20). $\square$

Poznamenejme, že předpoklad o regularitě (3.21) je splněn např. pro konvexní oblasti a Dirichletovu úlohu s Laplaceovým operátorem. Odhady z vět 3.7 a 3.9 pak lze napsat dohromady takto:

$$\|u - u_h\|_0 + h \|u - u_h\|_1 \leq Ch^{k+1}|u|_{k+1}.$$

3.4. Aposteriorní odhady chyby

V minulém paragrafu jsme naznačili, jak odvodit apriorní odhady chyby (srov. (3.20))

$$\|u - u_h\|_1 \leq C(u, h),$$

kde pravá strana je většinou tvaru $C(u, h) = Ch^k|u|_{k+1}$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Takové odhady ukazují asymptotické chování chyby pro $h \rightarrow 0$. Nicméně většinou neznáme realistický odhad konstanty C , která záleží na několika dalších konstantách vystupujících v Céově lemmatu 3.2, větě o stopách, Friedrichsové (Poincarého) nerovnosti, Brambleově-Hilbertově lemmatu (viz [33]), regularitě použitých triangulací atd. Velikost seminormy $|u|_{k+1}$ přesného řešení také není známa. Navíc v případě nekonvexních oblastí, smíšených okrajových podmínek, skocích v koeficientech není řešení u z prostoru $H^2(\Omega)$, a tedy tato seminorma není dobře definována (je „nekonečno“). Tudíž nejsme vlastně schopni odhadnout, „jak daleko“ je přibližné řešení u_h od přesného řešení u pro danou triangulaci.

Cílem tohoto paragrafu je představit tzv. *aposteriorní odhady chyby*, které nám dávají jistou informaci o velikosti chyby po výpočtu. Většina aposteriorních odhadů je tvaru

$$\|u - u_h\|_1 \leq C(u_h, h),$$

kde u_h je přibližné řešení. V našem případě bude pravá strana ještě záviset na dalším přibližném řešení (srov. (3.38)). K tomuto účelu použijeme současně primární a duální metodu konečných prvků pro řešení následující úlohy

$$(3.22) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$ a $\mathcal{A} = (a_{ij})$ je symetrická a stejnoměrně pozitivně definitní matice, jejíž prvky jsou z $L^\infty(\Omega)$.

Variační formulace úlohy (3.22) (v označení zavedeném v paragrafu 3.2) spočívá v minimalizaci kvadratického funkcionálu (viz větu 2.4)

$$(3.23) \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_0$$

na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$, kde

$$a(v, w) = (\mathcal{A} \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} w)_0.$$

Jak uvidíme později, současné použití primární a duální (rovnovážné) metody konečných prvků nám umožňuje získat aposteriorní odhady chyby, dvoustranné odhady chyby a navíc použít metodu hyperkruhu (viz [57]).

Nejprve opatřeme prostor $(L^2(\Omega))^d$ skalárním součinem

$$(3.24) \quad b(q, q') = (\mathcal{A}^{-1}q, q')_0, \quad q, q' \in (L^2(\Omega))^d.$$

Podle [26], str. 46, jsou prostory

$$(3.25) \quad Q = \{q \in (L^2(\Omega))^d \mid (q, \operatorname{grad} v)_0 = 0 \quad \forall v \in V\},$$

$$(3.26) \quad Q' = \{q' \in (L^2(\Omega))^d \mid \exists v \in V : q' = \mathcal{A} \operatorname{grad} v\}$$

uzavřenými podprostory v $(L^2(\Omega))^d$. Nyní ukážeme, že Q' je ortogonálním doplňkem Q ve $(L^2(\Omega))^d$ vzhledem ke skalárnímu součinu $b(\cdot, \cdot)$.

Lemma 3.10. $(L^2(\Omega))^d = Q \oplus Q'$.

D ů k a z . Necht $q \in Q$ a $q' \in Q'$ jsou dány. Pak existuje $v \in V$ takové, že $q' = \mathcal{A} \operatorname{grad} v$ a platí

$$(3.27) \quad b(q, q') = (\mathcal{A}^{-1}q, \mathcal{A} \operatorname{grad} v)_0 = (q, \operatorname{grad} v)_0 = 0.$$

Označme $(Q')^\perp$ ortogonální doplněk Q' v $(L^2(\Omega))^d$ vzhledem k $b(\cdot, \cdot)$. Využijeme-li (3.27), vidíme, že $Q \perp Q'$, a tak $Q \subset (Q')^\perp$.

Necht naopak $q \in (Q')^\perp$. Pak

$$(3.28) \quad b(q, \mathcal{A} \operatorname{grad} v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

což implikuje, že

$$(q, \text{grad } v)_0 = 0 \quad \forall v \in V,$$

tj. $q \in Q$. $\square$

Duální variační formulace úlohy (3.22) spočívá v nalezení $p \in Q(f)$, které minimalizuje funkcionál

$$(3.29) \quad I(q) = \frac{1}{2}b(q, q)$$

na množině (afinní varietě)

$$Q(f) = \{q \in (L^2(\Omega))^d \mid (q, \text{grad } v)_0 = (f, v)_0 \quad \forall v \in V\}.$$

Věta 3.11. *Duální variační formulace má právě jedno řešení $p \in Q(f)$ a platí*

$$(3.30) \quad p = \mathcal{A} \text{grad } u,$$

$$(3.31) \quad J(u) + I(p) = 0.$$

Důkaz. Duální variační formulace může být ekvivalentně formulována takto: Najít $p^0 \in Q = Q(0)$, které minimalizuje kvadratický funkcionál

$$\bar{I}(q) = \frac{1}{2}b(q, q) + b(q, \bar{p})$$

na prostoru $Q(0)$, kde (tzv. partikulární řešení) $\bar{p} \in (L^2(\Omega))^d$ splňuje rovnici

$$(3.32) \quad (\bar{p}, \text{grad } v)_0 = (f, v)_0 \quad \forall v \in V$$

a platí $Q(f) = \bar{p} + Q(0)$. Předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 pro bilineární symetrickou formu $b(., .)$ a lineární formu $b(., \bar{p})$ jsou splněny. Tudíž podle věty 2.4 existuje řešení p^0 v prostoru $Q(0)$, a proto můžeme položit $p = p^0 + \bar{p}$. Jednoznačnost p okamžitě plyne z ryzí konvexity I a konvexity $Q(f)$.

Definujeme-li $\|q\| = \sqrt{b(q, q)}$, pak pomocí (3.29) a lemmatu 3.10 můžeme psát

$$2I(q) = b(q, q) = \|q\|^2 = \|q - \mathcal{A} \text{grad } u\|^2 + \|\mathcal{A} \text{grad } u\|^2 \quad \forall q \in Q(f),$$

protože

$$b(q - \mathcal{A} \text{grad } u, \mathcal{A} \text{grad } u) = (q, \text{grad } u)_0 - (\mathcal{A} \text{grad } u, \text{grad } u)_0 = (f, u)_0 - (f, u)_0 = 0.$$

Tudíž I nabývá minima právě v bodě $\mathcal{A} \text{grad } u$, což implikuje (3.30).

Z (3.23), (3.29), (3.24) a (3.30) dostáváme

$$\begin{aligned} J(u) + I(p) &= J(u) + I(\mathcal{A} \text{grad } u) = \frac{1}{2}(\mathcal{A} \text{grad } u, \text{grad } u)_0 - (f, u)_0 + \frac{1}{2}(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} \text{grad } u, \mathcal{A} \text{grad } u)_0 \\ &= (\mathcal{A} \text{grad } u, \text{grad } u)_0 - (f, u)_0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka 3.12. V důsledku rovnosti (3.31) se funkcionál I nazývá *funkcionálem doplňkové energie*.

Slabé řešení okrajové eliptické úlohy není mnohdy tak zajímavé jako jeho *kogradient* $\mathcal{A} \operatorname{grad} u$, např. znalost magnetického toku je mnohem důležitější než znalost odpovídajícího magnetického potenciálu. Kogradient u_h můžeme počítat diferenciací u_h . Získáme tak gradient, který ještě přenásobíme maticí $\mathcal{A}$. Jinou cestou může být přímé použití duální metody konečných prvků.

Nechť $V_h \subset V$ a $Q_h \subset Q$ jsou prostory konečných prvků. *Primární, resp. duální, metoda konečných prvků* pro problém (3.22) spočívá v nalezení u_h , resp. p_h , které minimalizuje funkcionál J , resp. I , na V_h , resp. $\bar{p} + Q_h$, kde $\bar{p} \in (L^2(\Omega))^d$ splňuje rovnici (3.32). Z Greenovy věty 2.10 pro dostatečně hladké $\bar{p}$ plyne, že $(\bar{p}, \operatorname{grad} v)_0 = -(\operatorname{div} \bar{p}, v)_0$, což dává rovnici rovnováhy $\operatorname{div} \bar{p} + f = 0$. K získání partikulárního řešení $\bar{p}$ stačí tedy např. položit

$$\bar{p}(x_1, \dots, x_d) = \left(- \int_0^{x_1} f(\xi, x_2, \dots, x_d) d\xi, 0, \dots, 0 \right), \quad (x_1, \dots, x_d) \in \Omega,$$

a rovnice rovnováhy bude splněna. Jiná možnost je volba $\bar{p} = \operatorname{grad} z$, kde $z \in V$ je jediné řešení rovnice $(\operatorname{grad} z, \operatorname{grad} v)_0 = (f, v)_0$ pro všechna $v \in V$.

Poznámka 3.13. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, $\Omega \in \mathcal{L}$,

$$W = H^1(\Omega),$$

$\{w^i\}_{i=1}^m$ je báze nějakého prostoru konečných prvků $W_h \subset W$, $q^i = \operatorname{curl} w^i = (\partial_2 w^i, -\partial_1 w^i)^T$, $i = 1, \dots, m$, a necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ jsou takové, že

$$(3.33) \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i w^i = 1 \quad \text{v } \Omega.$$

Potom pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$, pro něž $\alpha_k \neq 0$, tvoří množina

$$(3.34) \quad \{q^1, \dots, q^{k-1}, q^{k+1}, \dots, q^m\}$$

bázi prostoru

$$Q_h = \operatorname{curl} W_h = \{q_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid \exists w_h \in W_h : q_h = \operatorname{curl} w_h\}.$$

Aplikujeme-li totiž operátor curl na obě strany rovnice (3.33), dostaneme

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i q^i = 0.$$

Pro $\alpha_k \neq 0$ tedy můžeme psát

$$q^k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{i \neq k} \alpha_i q^i.$$

Pro libovolné $q \in Q_h$ proto existují $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tak, že

$$q = \sum_{i \neq k} \beta_i q^i + \beta_k q^k = \sum_{i \neq k} \left(\beta_i - \beta_k \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \right) q^i.$$

Vidíme, že množina (3.34) generuje prostor Q_h . Protože v jádře operátoru curl jsou pouze konstantní funkce, je $\dim W_h = \dim Q_h + 1$. Čili (3.34) je báze. Jestliže navíc w^i mají malý nosič, pak také q^i mají malý nosič.

Ze vztahu (viz [31])

$$Q = \text{curl } W = \{q \in (L^2(\Omega))^2 \mid \exists w \in W : q = \text{curl } w\}$$

plyne, že $Q_h \subset Q$. V (4.14) představíme jiný typ operátoru rotace ve dvou prostorových dimenzích, který vektorovým funkcím přiřazuje funkce skalární.

Předpokládejme na okamžik, že $\mathcal{A}$ je konstantní. Pak z rovnosti

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} (3.35) \quad b(q^i, q^j) &= (\mathcal{A}^{-1} q^i, q^j)_0 = (\mathcal{A}^{-1} \text{curl } w^i, \text{curl } w^j)_0 \\ &= (\mathcal{A} \text{grad } w^i, \text{grad } w^j)_0 / \det \mathcal{A} = a(w^i, w^j) / \det \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Tento vztah značně zjednodušuje sestavování matice tuhosti, resp. poddažnosti, pro primární, resp. duální, metodu konečných prvků. Je-li systém prostorů $\{W_h\}$ hustý ve W v normě $\|\cdot\|_1$, je $\{Q_h\}$ hustý v Q v normě $\|\cdot\|_0$, což zaručuje konvergenci duální metody konečných prvků. Více o tomto postupu je v [32].

Připomeňme, že

$$(3.36) \quad \|q\| = \sqrt{b(q, q)} \quad \forall q \in (L^2(\Omega))^d.$$

Tato norma je ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_0$, protože $\mathcal{A}^{-1}$ je stejnoměrně pozitivně definitní a její prvky patří do $L^\infty(\Omega)$, tj. existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že

$$(3.37) \quad c_1 \|q\|_0 \leq \|q\| \leq c_2 \|q\|_0 \quad \forall q \in (L^2(\Omega))^d.$$

Věta 3.14. (*Aposteriorní odhady chyby.*) *Nechť u , resp. p , jsou řešení primární, resp. duální, variační formulace problému (3.22). Nechť u_h , resp. p_h , jsou odpovídající přibližná řešení. Pak existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ nezávislé na V_h a Q_h tak, že*

$$(3.38) \quad C_1 \|u - u_h\|_1 \leq \|\mathcal{A} \text{grad } u_h - p_h\|_0,$$

$$(3.39) \quad C_2 \|p - p_h\|_0 \leq \|\mathcal{A} \text{grad } u_h - p_h\|_0.$$

D ů k a z . Duální variační formulace úlohy (3.22) spočívá v minimalizaci funkcionálu I přes afinní varietu $Q(f)$. Nechť tedy $q \in Q(f)$ je libovolné. Pak pomocí (3.30) dostaneme $\mathcal{A} \text{grad } u - q \in Q = Q(0)$ a zřejmě $\mathcal{A} \text{grad } (u_h - u) \in Q'$. Z lematu 3.10 víme, že prostory Q a Q' jsou $b(\cdot, \cdot)$ -ortogonální, a proto

$$\begin{aligned} (3.40) \quad \|\mathcal{A} \text{grad } u_h - q\|^2 &= \|\mathcal{A} \text{grad } u_h - \mathcal{A} \text{grad } u + \mathcal{A} \text{grad } u - q\|^2 \\ &= \|\mathcal{A} \text{grad } (u_h - u)\|^2 + \|\mathcal{A} \text{grad } u - q\|^2. \end{aligned}$$

Položíme-li $q = p_h$, potom z (3.30) a (3.37) vidíme, že (3.39) je splněno.

Z (3.40), (3.36), (3.24) a V -eliptičnosti $a(\cdot, \cdot)$ dostaneme

$$\|\mathcal{A} \text{ grad } u_h - p_h\|^2 \geq \|\mathcal{A} \text{ grad } (u - u_h)\|^2 = a(u - u_h, u - u_h) \geq C' \|u - u_h\|_1^2.$$

Tudíž (3.38) platí v důsledku ekvivalence (3.37). $\square$

Poznámka 3.15. Pokud aplikujeme jak primární, tak duální metodu konečných prvků k řešení úlohy (3.22), pak je pravá strana nerovností (3.38) a (3.39) známa a může být použita k odhadům chyby. Poznamenejme, že $C_2 = 1$ v případě Laplaceova operátoru, protože $c_1 = c_2 = 1$ v (3.37).

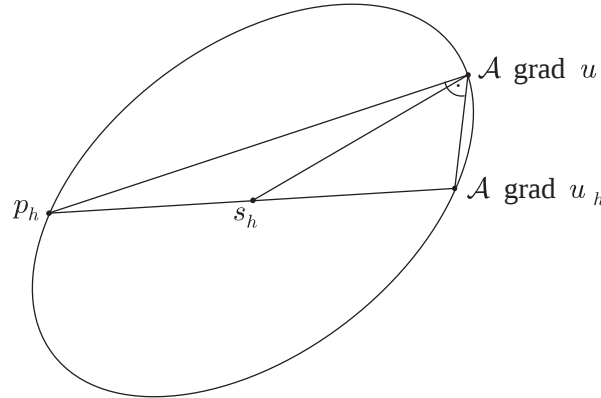
Věta 3.16. (*Metoda hyperkruhu.*) *Za předpokladů věty 3.14 platí*

$$(3.41) \quad \|\mathcal{A} \text{ grad } u - \tfrac{1}{2}(\mathcal{A} \text{ grad } u_h + p_h)\| = \tfrac{1}{2} \|\mathcal{A} \text{ grad } u_h - p_h\|.$$

D ů k a z . Vektory $p - p_h \in Q$ a $\mathcal{A} \text{ grad } (u - u_h) \in Q'$ jsou $b(\cdot, \cdot)$ -ortogonální podle lemmatu 3.10. Tudíž ze vztahu $p = \mathcal{A} \text{ grad } u$ (srov. (3.30)) dostaneme

$$\begin{aligned} \|2\mathcal{A} \text{ grad } u - \mathcal{A} \text{ grad } u_h - p_h\|^2 &= \|\mathcal{A} \text{ grad } u - \mathcal{A} \text{ grad } u_h + \mathcal{A} \text{ grad } u - p_h\|^2 \\ &= \|\mathcal{A} \text{ grad } (u_h - u)\|^2 + \|\mathcal{A} \text{ grad } u - p_h\|^2 \\ &= \|\mathcal{A} \text{ grad } u_h - \mathcal{A} \text{ grad } u + \mathcal{A} \text{ grad } u - p_h\|^2 = \|\mathcal{A} \text{ grad } u_h - p_h\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka 3.17. Kogradient $\mathcal{A} \text{ grad } u$ přesného řešení u leží na hyperkružnici (viz obr. 3.8) o středu $s_h = \frac{1}{2}(\mathcal{A} \text{ grad } u_h + p_h)$ a poloměru $\frac{1}{2} \|\mathcal{A} \text{ grad } u_h - p_h\|$. Pokud považujeme průměr $\frac{1}{2}(\mathcal{A} \text{ grad } u_h + p_h)$ za přibližné řešení, pak norma chyby je přesně rovna poloměru hyperkruhu. (viz (3.41)).



Obr. 3.8

Věta 3.18. (*Dvoustranné odhady energie.*) *Za předpokladů věty 3.14 platí*

$$(3.42) \quad -I(p_h) \leq J(u) \leq J(u_h),$$

a

$$(3.43) \quad a(u_h, u_h) \leq a(u, u) \leq \|p_h\|^2.$$

D ů k a z . Protože $Q_h \subset Q$, vidíme, že $\bar{p} + Q_h \subset \bar{p} + Q$, a tedy ze vztahu $J(u) + I(p) = 0$ máme

$$-I(p_h) \leq -I(p) = J(u) \leq J(u_h).$$

Proto platí (3.42).

Ze symetrie $a(\cdot, \cdot)$, slabé formulace a (3.11) dostaneme tzv. *podmínku ortogonality*

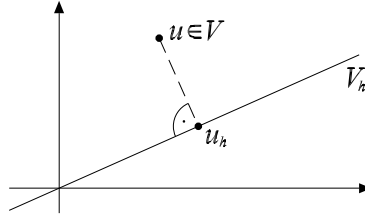
$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

která říká, že chyba $u - u_h$ je kolmá na prostor V_h vzhledem ke skalárnímu součinu $a(\cdot, \cdot)$ – viz obr. 3.9.

Protože $a(u - u_h, u_h) = 0$, platí

$$0 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u, u) - 2a(u, u_h) + 2a(u_h, u_h) - a(u_h, u_h) = a(u, u) - a(u_h, u_h),$$

a první nerovnost v (3.43) je tak dokázána.



Obr. 3.9

Ze slabé formulace a definice J máme

$$(3.44) \quad J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - (f, u)_0 = \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, u) = -\frac{1}{2}a(u, u).$$

Na druhé straně podle (3.42) je

$$-J(u) \leq I(p_h).$$

Odtud a z (3.44) vyplývá, že

$$\frac{1}{2}a(u, u) \leq I(p_h),$$

a tak dostaneme druhou nerovnost z (3.43),

$$a(u, u) \leq 2I(p_h) = \|p_h\|^2. \quad \square$$

Poznamenejme ještě, že dvoustranné odhady chyby jsou velice prospěšné pro testování spolehlivosti programů – viz [33]. Zde jsou také uvedeny aposteriorní odhady chyby pro smíšené okrajové podmínky. Jiný přístup k aposteriorním odhadům si ukážeme v kapitolách 12 a 13 (viz též [29]).

4. VÝPOČET NELINEÁRNÍHO STACIONÁRNÍHO MAGNETICKÉHO POLE

4.1. Úvod do teorie monotónních operátorů

V současnosti lze lineární modely různých fyzikálních polí celkem úspěšně numericky implementovat. Situace je poněkud odlišná u nelineárních modelů, protože neexistuje obecná metoda pro jejich řešení. Proto každá třída nelineárních problémů musí být vyšetřována individuálně a v úvahu se berou její speciální vlastnosti. V této kapitole se budeme zabývat teorií monotónních operátorů, která představuje velice užitečný nástroj k vyšetřování široké třídy nelineárních operátorů.

Nechť V je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (viz kap. 2). Uvažujme operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$, který je obecně nelineární. Budeme se zabývat problémem nalezení $u \in V$ takového, že

$$(4.1) \quad \mathbb{A}u = b$$

pro dané $b \in V$.

Poznamenejme, že rovnice (4.1) může být ekvivalentně zapsána takto:

$$(4.2) \quad \langle \mathbb{A}u, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Okamžitě je vidět, že (4.1) implikuje (4.2). Pro důkaz obrácené implikace položíme $v = \mathbb{A}u - b$. Pak z (4.2) a (2.5) dostaneme $\langle \mathbb{A}u - b, \mathbb{A}u - b \rangle = 0$ a ze vztahu (2.8) máme $\mathbb{A}u = b$.

Definice 4.1. Operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ se nazývá

(i) *monotónní, jestliže*

$$(4.3) \quad \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

(ii) *ostře monotónní, jestliže*

$$(4.4) \quad \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle > 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 \neq v_2,$$

(iii) *silně monotónní, jestliže existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$(4.5) \quad \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle \geq C \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

kde $\|\cdot\|_V$ je indukovaná norma ($\|v\|_V = \sqrt{\langle v, v \rangle}$).

Povšimněme si, že (iii) $\implies$ (ii) $\implies$ (i).

Příklady 4.2.

a) Necht' $V = \mathbb{R}^1$ a necht' $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ je neklesající funkce. Pak vidíme, že

$$(f(x_1) - f(x_2))(x_1 - x_2) \geq 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1,$$

tj. f představuje monotónní operátor. Pro rostoucí funkci f pomocí (4.4) zjistíme, že f je ostře monotónní operátor.

b) Necht' $V = \mathbb{R}^N$ a A je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $N \times N$. Potom lineární zobrazení, jež je definováno vztahem $\mathbb{A} : x \in \mathbb{R}^N \mapsto Ax \in \mathbb{R}^N$, je monotónní operátor, protože

$$\langle \mathbb{A}x_1 - \mathbb{A}x_2, x_1 - x_2 \rangle = (x_1 - x_2)^T A(x_1 - x_2) \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je běžný skalární součin v $\mathbb{R}^N$. Jestliže A je pozitivně definitní, potom je odpovídající operátor $\mathbb{A}$ zřejmě silně monotónní. Pokud je ale A monotónní matice (tj. A^{-1} existuje a $A^{-1} \geq 0$), pak odpovídající operátor nemusí být nutně monotónní.

c) Necht' V je Hilbertův prostor a necht' $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá V -eliptická bilineární forma (která přísluší např. lineárnímu problému z paragrafu 3.2). Potom je odpovídající operátor $\mathbb{A}$ dobře definován vztahem

$$(4.6) \quad \langle \mathbb{A}w, v \rangle = a(w, v), \quad v, w \in V.$$

Tato definice je korektní, neboť pro dané pevné $w \in V$ je pravá strana (4.6) lineární spojitý funkcionál, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin ve V , a proto z Rieszovy věty 2.2 plyne existence jediného prvku $\mathbb{A}w \in V$. Z podmínky V -eliptičnosti (2.13) zjistíme, že $\mathbb{A}$ je silně monotónní,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle &= \langle \mathbb{A}v_1, v_1 - v_2 \rangle - \langle \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle \\ &= a(v_1, v_1 - v_2) - a(v_2, v_1 - v_2) \\ &= a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \geq C \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V \end{aligned}$$

pro nějaké $C > 0$.

d) Necht' $f \in L^2((0, 1))$. Uvažujme nelineární úlohu

$$(4.7) \quad -u'' + e^u = f \quad \text{v } (0, 1),$$

$$(4.8) \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Problémy podobného typu vznikají např. při simulaci chování polovodičových součástek (srov. (9.1)). Slabá formulace (4.7) a (4.8) zní:

Najít $u \in V = H_0^1((0, 1))$ tak, aby

$$\langle \mathbb{A}u, v \rangle = (f, v)_0 \quad \forall v \in V,$$

kde

$$(4.9) \quad \langle \mathbb{A}u, v \rangle = (u', v')_0 + (e^u, v)_0$$

a kde

$$\langle z, v \rangle = (z, v)_1$$

je standardní skalární součin v $H^1((0, 1))$ – viz (2.23).

Nejprve se přesvědčíme, že je operátor $\mathbb{A}$ dobře definován. Povšimněme si, že člen $(e^u, v)_0$ je konečný pro libovolná $u, v \in V$, neboť podle (2.30) jsou funkce u a v spojité na $[0, 1]$. Funkce $v \mapsto (u', v')_0 + (e^u, v)_0$ tak představuje spojitý lineární funkcionál na V a existence prvku $\mathbb{A}u \in V$ opět plyne z Rieszovy věty 2.2.

Protože je exponenciální funkce rostoucí, platí

$$(4.10) \quad (e^{\xi_1} - e^{\xi_2})(\xi_1 - \xi_2) \geq 0 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Díky vztahům (4.9), (4.10) a Friedrichsově nerovnosti (2.32) existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle &= (v'_1 - v'_2, v'_1 - v'_2)_0 + (e^{v_1} - e^{v_2}, v_1 - v_2)_0 \\ &\geq \|v'_1 - v'_2\|_0^2 \geq C\|v_1 - v_2\|_1^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Podle (4.5) je tedy operátor $\mathbb{A}$ silně monotónní.

Věta 4.3. *Rovnice (4.1) má nejvýše jedno řešení $u \in V$, pokud je operátor A ostře monotónní.*

D ů k a z . Jestliže $\mathbb{A}u_1 = \mathbb{A}u_2 = b$ pro nějaké $u_1, u_2 \in V$, pak $\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle b - b, u_1 - u_2 \rangle = 0$. Z (4.4) tak dostaneme $u_1 = u_2$. $\square$

Věta 4.4. *Nechť $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je silně monotónní operátor, který je lipschitzovsky spojitý, tj. existuje konstanta $C_L > 0$ taková, že*

$$(4.11) \quad \|\mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2\|_V \leq C_L\|v_1 - v_2\|_V \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Potom pro každé $b \in V$ má rovnice (4.1) právě jedno řešení.

D ů k a z . Budeme hledat pevný bod zobrazení $T_\varepsilon : V \rightarrow V$ definovaného vztahem

$$T_\varepsilon(v) = v - \varepsilon(\mathbb{A}v - b), \quad v \in V,$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$, které stanovíme později. Podle (4.5) a (4.11) pro každé $v_1, v_2 \in V$ platí

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(v_1) - T_\varepsilon(v_2)\|_V^2 &= \|(v_1 - v_2) - \varepsilon(\mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2)\|_V^2 \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\varepsilon\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle + \varepsilon^2\|\mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2\|_V^2 \\ &\leq (1 - 2\varepsilon C + \varepsilon^2 C_L^2)\|v_1 - v_2\|_V^2. \end{aligned}$$

Zvolíme-li nyní

$$\varepsilon \in \left(0, \frac{2C}{C_L^2}\right),$$

vidíme, že

$$(1 - 2\varepsilon C + \varepsilon^2 C_L^2)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Tudíž zobrazení T_ε je kontraktivní a podle Banachovy věty o pevném bodě existuje právě jeden prvek $u \in V$ takový, že

$$u - \varepsilon(\mathbb{A}u - b) = u,$$

což bylo dokázati. $\square$

Poznamenejme, že $C \leq C_L$, protože podle (4.5) a (4.11) máme

$$\begin{aligned} C\|v_1 - v_2\|_V^2 &\leq \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle \\ &\leq \|\mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \leq C_L \|v_1 - v_2\|_V^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Jestliže $\mathbb{A}$ je silně monotónní operátor a (4.11) neplatí, řešení (4.1) nemusí existovat pro každé $b \in V$. Abychom se o tom přesvědčili, stačí položit například $V = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{A}u = u + \text{sign } u$ pro $u \in V$ a $b = \frac{1}{2}$.

Jestliže $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je lineární operátor (ne nutně symetrický), potom podmínka (4.5) se redukuje na standardní podmínku V -eliptičnosti

$$\langle \mathbb{A}v, v \rangle \geq C\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

a (4.11) vede na běžnou spojitost $\mathbb{A}$,

$$\|\mathbb{A}v\|_V \leq C_L \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Definice 4.5. *Nechť $V_h \subset V$ je neprázdný konečněrozměrný prostor. Pak se funkce $u_h \in V_h$ nazývá Galerkinovo řešení problému (4.2), jestliže (viz [19])*

$$(4.12) \quad \langle \mathbb{A}u_h, v_h \rangle = \langle b, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Postačující podmínky pro jednoznačnost a existenci řešení u_h jsou stanoveny ve větách 4.3 a 4.4. Dále představíme analogii Céova lemmatu 3.2, které nám umožňuje převést otázku konvergence $\|u - u_h\|_V \rightarrow 0$ pro $h \rightarrow 0$ na studium aproximačních vlastností systému $\{V_h\}$ ve V (viz par. 3.3).

Věta 4.6. *Nechť $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je silně monotónní a lipschitzovsky spojitý operátor. Nechť $V_h \neq \emptyset$ je konečněrozměrný podprostor V . Pak existuje konstanta C nezávislá na prostoru V_h tak, že*

$$(4.13) \quad \|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

kde u , resp. u_h , je řešení (4.1), resp. (4.12).

D ů k a z . Podle věty 4.4 řešení u a u_h existují a jsou jediná. Vztahy (4.2) a (4.12) tedy implikují

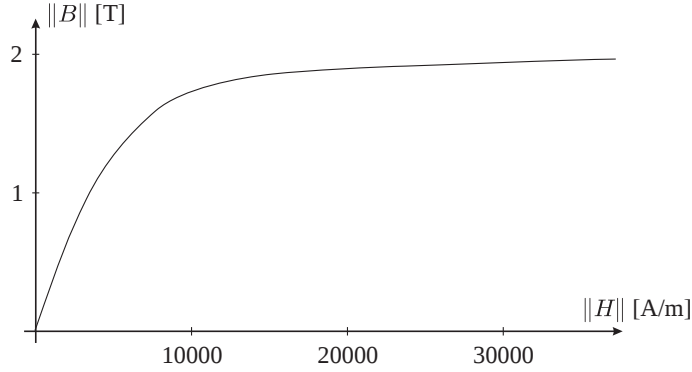
$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}u_h, u_h - v_h \rangle = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Odtud, ze (4.5) a (4.11) vidíme, že

$$\begin{aligned} C\|u - u_h\|_V^2 &\leq \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}u_h, u - u_h \rangle + \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}u_h, u_h - v_h \rangle \\ &\leq \|\mathbb{A}u - \mathbb{A}u_h\|_V \|u - v_h\|_V \\ &\leq C'\|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V \quad \forall v_h \in V_h. \quad \square \end{aligned}$$

4.2. Aplikace

Výsledky předchozího paragrafu 4.1 mohou být použity k výpočtu magnetického pole v nelineárním prostředí celé řady elektromagnetických zařízení (jako jsou například elektromagnety, transformátory a jejich magnetické obvody či stínění, synchronní a asynchronní točivé stroje, indukční cívky, magnetické hlavy magnetofonů, magnetické čočky v elektronových mikroskopech, magnetické pasti v tokamacích, lineární akcelerátory).



Obr. 4.1

Nechť $\Omega \in \mathcal{L}$ je jednoduše souvislá oblast. Pro jednoduchost předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tj. budeme uvažovat jen řezy elektromagnetického zařízení. Připomeňme si systém Maxwellových rovnic popisující stacionární magnetické pole (viz (1.5))

$$(4.14) \quad \operatorname{rot} H = f \quad \text{v } \Omega,$$

$$(4.15) \quad \operatorname{div} B = 0 \quad \text{v } \Omega,$$

$$(4.16) \quad n \cdot B = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $f \in L^2(\Omega)$ proudová hustota, $\operatorname{rot} H = \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1$, vztah mezi magnetickou intenzitou (tj. mg. polem) $H = (H_1, H_2)^T$ a magnetickou indukcí $B = (B_1, B_2)^T$ je obecně nelineární (viz obr. 4.1) skrze skalární spojitou funkci ν ,

$$(4.17) \quad H(x) = \nu(x, \|B(x)\|^2)B(x) \quad \text{pro s.v. } x \in \Omega,$$

kde $\|\cdot\|$ je euklidovská norma a ν je tzv. *magnetická reluktivita*, kterou lze vyjádřit takto:

Jestliže $\eta \geq 0$, pak položíme

$$(4.18) \quad \nu(x, \eta) = \begin{cases} \nu_0 & \text{pro } x \in \Omega_0, \\ \nu_1(\eta) & \text{pro } x \in \Omega_1, \end{cases}$$

kde Ω_0 a Ω_1 jsou disjunktní a měřitelné části Ω , $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_1}$, Ω_1 odpovídá feromagnetickému materiálu a Ω_0 ostatním materiálům (měděné či hliníkové vodiče, izolace, vzduch, ...), $\nu_0 = 1/\mu_0$, μ_0 je permeabilita vakua a $\nu_1 \in C^1([0, \infty))$ je neklesající funkce taková, že

$$(4.19) \quad C_0 \leq \nu_1(\eta) \leq C_1,$$

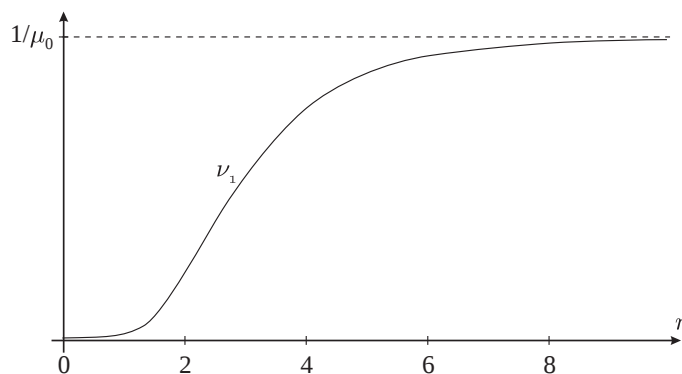
$$(4.20) \quad |\vartheta \nu_1'(\eta)| \leq C_2$$

pro všechna $\eta \geq \vartheta \geq 0$ a nějaké kladné konstanty C_0 , C_1 a C_2 . Předpoklady (4.19) a (4.20) jsou splněny např. pro funkci (viz obr. 4.2)

$$\nu_1(\eta) = \frac{1}{\mu_0} \left(\alpha + (1 - \alpha) \frac{\eta^8}{\eta^8 + \beta} \right),$$

kteřá charakterizuje reluktivitu statorových plechů v elektromotoru pro $\alpha = 0.0003$ a $\beta = 16\,000$ (srov. [23], str. 59). V okolí počátku jsou její hodnoty velice malé, leč odražené od nuly.

Předchozí situace odpovídá izotropnímu prostředí. V případě anizotropního prostředí je ν maticová funkce. Například u velkých transformátorů se k výrobě magnetického obvodu používají tzv. superorientované železné plechy, které mají velmi malou reluktivitu podél indukčních čar a naopak velkou reluktivitu napříč. Jedná se o ortotropní materiál, kdy $\nu(x, \cdot)$ je maticová funkce s nulovými prvky mimo diagonálu.



Obr. 4.2

V důsledku (4.15) existuje tzv. proudová funkce $u \in H^1(\Omega)$ (určená jednoznačně až na konstantu) tak, že (viz [21], str. 37)

$$(4.21) \quad B = \text{curl } u,$$

kde $\text{curl } u = (\partial_2 u, -\partial_1 u)$. Funkce u se nazývá *skalární magnetický potenciál*. Vidíme, že

$$\|B(x)\| = \|\text{curl } u(x)\| = \|\text{grad } u(x)\|,$$

a tedy

$$(4.22) \quad \nu(x, \|B(x)\|^2) = \nu(x, \|\text{grad } u(x)\|^2)$$

pro s.v. $x \in \Omega$. Podle (4.14), (4.17), (4.22) a (4.21) tudíž formálně platí

$$\begin{aligned} f &= \text{rot } H = \text{rot } (\nu(\cdot, \|B\|^2)B) = \text{rot } (\nu(\cdot, \|\text{curl } u\|^2)\text{curl } u) \\ &= -\text{div}(\nu(\cdot, \|\text{grad } u\|^2)\text{grad } u). \end{aligned}$$

Z (4.16) a (4.21) pro jednotkový tečný vektor $t = (-n_2, n_1)$ k $\partial\Omega$ dostáváme

$$0 = n \cdot B = n \cdot \text{curl } u = t \cdot \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial t},$$

což znamená, že u je konstantní na hranici (můžeme např. zvolit $u = 0$ na $\partial\Omega$). Takto získáme následující nelineární Dirichletův eliptický problém

$$(4.23) \quad \begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu(x, \|\text{grad } u(x)\|^2) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Pro jednoduchost nebudeme obvykle explicitně vyznačovat možnou závislost ν na x . Slabá formulace problému (4.23) zní takto:

Nalézt $u \in V$ tak, že

$$(4.24) \quad a(u; u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in V,$$

kde

$$V = H_0^1(\Omega)$$

a

$$(4.25) \quad a(y; w, v) = (\nu(\|\text{grad } y\|^2)\text{grad } w, \text{grad } v)_0, \quad v, w, y \in V.$$

Povšimněme si, že skalární součin daný integrálem přes Ω je díky (4.18) a (4.19) konečný.

Abychom vyšetřili řešitelnost problému (4.24) a jeho aproximace pomocí metody konečných prvků, použijeme výsledky o monotónních operátorech z vět 4.4 a 4.6. K tomuto účelu definujme (podobně jako v (4.6)) operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ vztahem

$$(4.26) \quad \langle \mathbb{A}w, v \rangle = a(w; w, v), \quad v \in V,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je standardní skalární součin v $H^1(\Omega)$. Pro každé $w \in V$ pevné představuje $a(w; w, \cdot)$ lineární spojitý funkcional na V . Tudíž $\mathbb{A}w \in V$ existuje a je jediné podle Rieszovy věty 2.2.

Nyní prověříme, zda je operátor $\mathbb{A}$ lipschitzovsky spojitý a silně monotónní. Nejprve ověříme podmínku (4.11). Uvažujme funkci $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovanou vztahem

$$(4.27) \quad F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi))^T = \nu_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2.$$

Matice prvních parciálních derivací F je symetrická tvaru

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} 2\xi_1^2\nu_1'(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \nu_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) & \text{sym.} \\ 2\xi_1\xi_2\nu_1'(\xi_1^2 + \xi_2^2) & 2\xi_2^2\nu_1'(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \nu_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{pmatrix}.$$

Položíme-li $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2$ a $\vartheta = \xi_1^2$ v (4.19) a (4.20), dostaneme

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} \right| \leq |2\xi_1^2\nu_1'(\xi_1^2 + \xi_2^2)| + |\nu_1(\xi_1^2 + \xi_2^2)| \leq 2C_2 + C_1.$$

Podobně

$$\left| \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} \right| = |2\xi_1\xi_2\nu_1'(\xi_1^2 + \xi_2^2)| \leq |\xi_1^2\nu_1'(\eta)| + |\xi_2^2\nu_1'(\eta)| \leq 2C_2$$

atd. Parciální derivace F jsou tedy spojitě a ohraničené, a proto je F lipschitzovsky spojitá funkce. Pak podle (4.27) a (4.18) máme

$$(4.28) \quad \|\nu(x, \|\xi\|^2)\xi - \nu(x, \|\zeta\|^2)\zeta\| \leq C\|\xi - \zeta\| \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \Omega.$$

Opět vypouštíme proměnnou x . Položme $\xi = \text{grad } v_1(x)$, $\zeta = \text{grad } v_2(x)$ pro libovolné $v_1, v_2 \in V$ a umocňme (4.28) na druhou. Potom integrací přes Ω a zpětným odmocněním obdržíme

$$\|\nu(\|\text{grad } v_1\|^2)\text{grad } v_1 - \nu(\|\text{grad } v_2\|^2)\text{grad } v_2\|_0 \leq C \|\text{grad } (v_1 - v_2)\|_0.$$

Odtud, z (4.26), (4.25) a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti (2.10) konečně dostaneme

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2\|_1 &= \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in H^1(\Omega)}} \frac{\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, w \rangle}{\|w\|_1} = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in H^1(\Omega)}} \frac{a(v_1; v_1, w) - a(v_2; v_2, w)}{\|w\|_1} \\ &\leq C \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in H^1(\Omega)}} \frac{\|\text{grad } (v_1 - v_2)\|_0 \|\text{grad } w\|_0}{\|w\|_1} \leq C\|v_1 - v_2\|_1, \end{aligned}$$

tj. (4.11) platí.

Dále ukážeme, že $\mathbb{A}$ je silně monotónní. Nechť $v_1, v_2 \in V$ jsou libovolné funkce. Definujme

$$w = v_1 - v_2$$

a

$$\varphi(t) = \int_{\Omega_1} \nu_1(\|\text{grad } (v_2 + tw)\|^2)(\text{grad } (v_2 + tw), \text{grad } w) \, dx, \quad t \in [0, 1].$$

Protože o funkci ν_1 předpokládáme, že je spojitě diferencovatelná a neklesající, její derivace je nezáporná a podle (4.19) platí

$$\begin{aligned} (4.29) \quad \varphi'(t) &= \int_{\Omega_1} \left[\nu_1(\|\text{grad } (v_2 + tw)\|^2) \|\text{grad } w\|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nu_1'(\|\text{grad } (v_2 + tw)\|^2)(\text{grad } (v_2 + tw), \text{grad } w)^2 \right] dx \\ &\geq C_0 \|\text{grad } w\|_{0, \Omega_1}^2, \end{aligned}$$

kde $C_0 > 0$ nezávisí na $t \in [0, 1]$. Navíc vidíme, že φ' je spojitá. Ze vztahů (4.26), (4.25), (4.18) a (4.29) pak dostaneme

$$\begin{aligned}
\langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, w \rangle &= (\nu(\|\text{grad } v_1\|^2) \text{grad } v_1, \text{grad } w)_{0, \Omega_0 \cup \Omega_1} \\
&\quad - (\nu(\|\text{grad } v_2\|^2) \text{grad } v_2, \text{grad } w)_{0, \Omega_0 \cup \Omega_1} \\
&= (\nu_0 \text{grad } v_1, \text{grad } w)_{0, \Omega_0} - (\nu_0 \text{grad } v_2, \text{grad } w)_{0, \Omega_0} + \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \nu_0 (\text{grad } w, \text{grad } w)_{0, \Omega_0} + \varphi'(t_0) \geq \min(\nu_0, C_0) \|\text{grad } w\|_0^2 \\
&\geq \overline{C} \|v_1 - v_2\|_1^2,
\end{aligned}$$

kde pozitivnost $\overline{C}$ plyne z Friedrichsovy nerovnosti (2.32) a existence $t_0 \in (0, 1)$ je zaručena větou o střední hodnotě. Proto (4.5) platí a větu 4.4 lze použít.

Existuje tedy právě jedno slabé řešení $u \in V$ problému (4.23) a právě jedno řešení problému:

Nalézt $u_h \in V_h$ tak, aby

$$(4.30) \quad a(u_h; u_h, v_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Funkce u_h je Galerkinovou aproximací řešení úlohy (4.24), jak plyne z (4.12) a (4.25). Problém konvergence u_h k u v normě $\|\cdot\|_1$ může být nyní převeden pomocí věty 4.6 na problém vyšetření aproximačních vlastností systému $\{V_h\}$ ve V . Je-li řešení u dostatečně hladké, lze dokonce očekávat jistou rychlost konvergence. Důkaz je stejný jako v paragrafu 3.3.

Existuje několik způsobů, jak řešit diskretní problém (4.30) pro pevné h . Jedna z možností je převést tento problém na posloupnost lineárních úloh pomocí *metody postupných aproximací*:

Nechť $y_0 \in V_h$ je libovolné. Předpokládejme, že $y_k \in V_h$, $k \in \{0, 1, \dots\}$, je známo. Pak $y_{k+1} \in V_h$ je jednoznačně definováno pomocí Laxova-Milgrama lemmatu 2.3 jako řešení lineárního problému

$$(4.31) \quad a(y_k; y_{k+1}, v_h) = (f, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Tato metoda se někdy také nazývá Kačanovova metoda nebo metoda sečných modulů nebo metoda zamrzlých koeficientů. Konvergence $y_k \rightarrow u_h$ pro $k \rightarrow \infty$ je vyšetřována v [43].

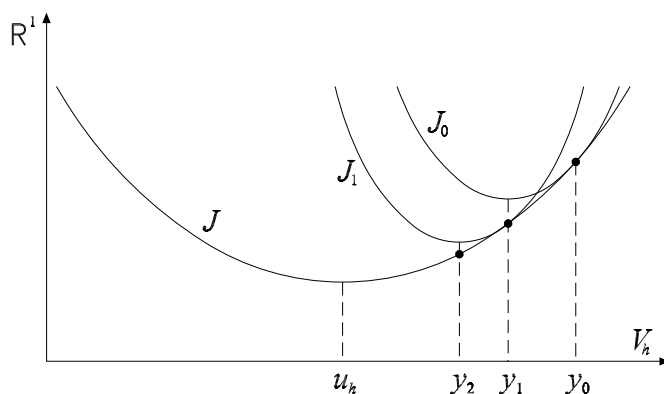
V [23] nebo [32], str. 212, se problém (4.30) transformuje na minimalizaci nekvadratického ryze konvexního funkcionálu (srov. též větu 5.13)

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathcal{N}(x, \|\text{grad } v\|^2) dx - \int_{\Omega} f v dx$$

na prostoru V_h , kde $\mathcal{N}(x, \cdot)$ je primitivní funkce k $\nu(x, \cdot)$ pro každé pevné $x \in \Omega$. Minimum lze hledat Newtonovou metodou, zobecněnou metodou sdružených gradientů nebo relaxační metodou. Lze též opět použít Kačanovovu metodu, která má v tomto případě pěknou geometrickou interpretaci (viz obr. 4.3).

Podle věty 2.4 lze převést lineární problém (4.31) na minimalizaci kvadratického funkcionálu

$$J_k(y) = \frac{1}{2} a(y_k; y, y) - (f, y)_0 - \frac{1}{2} a(y_k; y_k, y_k) + (f, y_k)_0 + J(y_k)$$



Obr. 4.3

na prostoru V_h . Poslední tři konstantní členy, které nemají vliv na řešení, jsou voleny tak, že

$$J_k(y_k) = J(y_k) \quad \text{pro } k \in \{0, 1, \dots\}.$$

(V paragrafu 5.1 zavedeme tzv. směrovou derivaci. Snadno lze ověřit, že v bodě y_k je směrová derivace pro oba funkcionály J_k a J stejná – srov. obr. 4.3.)

4.3. Hlavní věta o monotónních operátorech

Opět se budeme zabývat řešením rovnice (4.1). Tentokrát však budeme ignorovat silné předpoklady na silnou monotonii a lipschitzovskou spojitost (viz větu 4.4), které nemusí být splněny. V tomto paragrafu budeme předpokládat, že $\mathbb{A}$ je monotónní operátor z Hilbertova prostoru V do sebe. Nechť V je vybaven skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a indukovanou normou $\| \cdot \|_V$.

Monotónní operátory v Banachových prostorech se vyšetřují např. v [16], [17], [19]. Symbol $\langle v^*, v \rangle$ v tomto případě označuje hodnotu lineárního spojitého funkcionálu v^* v bodě v . Poznamenejme ale, že v Hilbertových prostorech lze podle Rieszovy věty každý lineární spojitý funkcionál jednoznačně vyjádřit pomocí skalárního součinu. Proto místo hodnoty lineárního spojitého funkcionálu v bodě píšeme skalární součin (viz též [19]).

Definice 4.7. O posloupnosti $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset V$ řekneme, že slabě konverguje k $v \in V$ (píšeme $v_k \rightharpoonup v$), jestliže

$$(4.32) \quad \langle v_k, w \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle \quad \forall w \in V.$$

Poznámka 4.8. Podle Rieszovy věty 2.2 je vztah (4.32) ekvivalentní

$$F(v_k) \rightarrow F(v) \quad \forall F \in V^*,$$

kde V^* je prostor všech spojitých lineárních funkcionálů definovaných na V . Prostor V^* se nazývá *duální prostor*. Je opatřen normou

$$\|F\|_{V^*} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} |F(v)|$$

a platí $\|F\|_{V^*} = \|w\|_V$, kde $F(v) = \langle v, w \rangle$ pro každé $v \in V$ díky Rieszově větě 2.2. Navíc rovnost $V = V^{**}$ říká, že každý Hilbertův prostor je reflexivní.

Jestliže $V \subset L^2(\Omega)$, pak zřejmě $V^* \supset (L^2(\Omega))^*$ (speciálně pro $V = H_0^1(\Omega)$ se duální prostor V^* označuje $H^{-1}(\Omega)$).

Dále poznamenejme, že (silná) konvergence $v_k \rightarrow v$ implikuje slabou konvergenci $v_k \rightharpoonup v$. Obrácená implikace obecně neplatí. Uvažujeme kupříkladu posloupnost $\{\sin kx\}_{k=1}^\infty$ v $L^2((0, \pi))$, jež konverguje slabě k nulovému prvku prostoru $L^2((0, \pi))$, ale nekonverguje v normě $\|\cdot\|_{0,2}$, protože vzhledem ke vztahu

$$\int_0^\pi (\sin kx - \sin jx)^2 dx = \pi \quad \text{pro } k \neq j$$

není tato posloupnost cauchyovská. V konečněrozměrných prostorech však ze slabé konvergence plyne silná.

Než dokážeme několik pomocných lemmat o monotónních operátorech, představíme dva důležité důsledky Banachovy-Steinhausovy věty:

Věta 4.9. (*Princip stejnoměrné ohraničenosti.*) *Nechť $\{v_k\} \subset V$ je posloupnost taková, že $\{\langle v_k, w \rangle\}$ je ohraničená pro každé $w \in V$. Pak posloupnost norem $\{\|v_k\|_V\}$ je také ohraničená.*

Důkaz viz [60], věta 4.4-C.

Věta 4.10. *Posloupnost $\{v_k\} \subset V$ konverguje slabě k prvku $v \in V$ právě tehdy, když je posloupnost $\{\|v_k\|_V\}$ ohraničená a*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle v_k, w \rangle = \langle v, w \rangle$$

pro všechna w z množiny, která je hustá ve V .

Důkaz viz [67], věta V.3.

Lemma 4.11. *Každý monotónní operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je lokálně ohraničený, tj. pro každé $v \in V$ existují konstanty $\delta > 0$ a $C > 0$ tak, že $\|\mathbb{A}z\|_V \leq C$ pro $z \in V$ a $\|z - v\|_V \leq \delta$.*

D ů k a z . Nechť $\mathbb{A}$ je monotónní operátor, který není lokálně ohraničený. Pak existuje $v \in V$ a posloupnost $\{v_k\} \subset V$ taková, že

$$(4.33) \quad v_k \rightarrow v \quad \text{a} \quad \|\mathbb{A}v_k\|_V \rightarrow \infty.$$

Z monotonie $\mathbb{A}$ máme

$$(4.34) \quad \langle \mathbb{A}(v + w) - \mathbb{A}v_k, v + w - v_k \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V.$$

Pro každé $k = 1, 2, \dots$ položíme

$$(4.35) \quad \alpha_k = 1 + \|\mathbb{A}v_k\|_V \|v - v_k\|_V.$$

Pak podle (4.34) a (4.35)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_k} \langle \mathbb{A}v_k, w \rangle &\leq \frac{1}{\alpha_k} (\langle \mathbb{A}v_k, v_k - v \rangle + \langle \mathbb{A}(v + w), w + v - v_k \rangle) \\ &\leq 1 + \frac{1}{\alpha_k} \|\mathbb{A}(v + w)\|_V (\|w\|_V + \|v - v_k\|_V) \leq C_1 \quad \forall w \in V,\end{aligned}$$

kde C_1 závisí na v, w , ale nezávisí na k . Podobný odhad platí také pro $(-w)$. Tudíž

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\alpha_k} \langle \mathbb{A}v_k, w \rangle \right| < \infty \quad \forall w \in V.$$

Z věty 4.9 potom vyplývá, že

$$(4.36) \quad \frac{1}{\alpha_k} \|\mathbb{A}v_k\|_V \leq C,$$

kde $C > 0$ je konstanta nezávislá na k . Z (4.36) společně s (4.35) nyní dostaneme

$$(4.37) \quad \|\mathbb{A}v_k\|_V \leq C\alpha_k = C(1 + \|\mathbb{A}v_k\|_V \|v - v_k\|_V).$$

Zvolme přirozené číslo k_0 tak, že pro každé $k > k_0$ platí

$$C\|v - v_k\|_V \leq \frac{1}{2}.$$

Pak podle (4.37)

$$\|\mathbb{A}v_k\|_V \leq C + \frac{1}{2} \|\mathbb{A}v_k\|_V.$$

Tedy $\|\mathbb{A}v_k\|_V \leq 2C$ pro všechna $k > k_0$, což odporuje (4.33). $\square$

Lemma 4.12. *Nechť $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je monotónní operátor a nechť $U \subset V$ je taková podmnožina, že*

$$(4.38) \quad \|v\|_V \leq C_1 \quad \text{a} \quad \langle \mathbb{A}v, v \rangle \leq C_2 \quad \forall v \in U.$$

Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\|\mathbb{A}v\|_V \leq C \quad \forall v \in U.$$

D ů k a z . Pomocí předchozího lemmatu 4.11 je operátor $\mathbb{A}$ lokálně ohraničený. Tedy je speciálně ohraničený v nule, tj. existuje $\delta > 0$ a $C_3 > 0$ tak, že

$$(4.39) \quad \|\mathbb{A}v\|_V \leq C_3 \quad \forall v \in V, \quad \|v\|_V \leq \delta.$$

Z monotonie $\mathbb{A}$ a ze vztahů (4.38) a (4.39) dostaneme, že pro všechna $v \in U$ platí

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}v\|_V &= \sup_{\|w\|_V=\delta} \frac{1}{\delta} \langle \mathbb{A}v, w \rangle \leq \sup_{\|w\|_V=\delta} \frac{1}{\delta} (\langle \mathbb{A}v, v \rangle + \langle \mathbb{A}w, w \rangle - \langle \mathbb{A}w, v \rangle) \\ &\leq \frac{1}{\delta} (C_2 + \delta C_3 + C_3 C_1). \quad \square\end{aligned}$$

Lemma 4.13. *Necht' $v_k, v, w_k, w \in V$ a necht' $v_k \rightharpoonup v$ a $w_k \rightarrow w$ pro $k \rightarrow \infty$. Potom*

$$\langle v_k, w_k \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle.$$

D ů k a z . Podle věty 4.10 je posloupnost $\|v_k\|_V$ ohraničená, jakmile $v_k \rightharpoonup v$. Důkaz nyní plyne přímo z trojúhelníkové nerovnosti, Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti (2.10) a z (4.32)

$$\begin{aligned} |\langle v_k, w_k \rangle - \langle v, w \rangle| &\leq |\langle v_k, w_k \rangle - \langle v_k, w \rangle| + |\langle v_k, w \rangle - \langle v, w \rangle| \\ &\leq \|v_k\|_V \|w_k - w\|_V + |\langle v_k, w \rangle - \langle v, w \rangle| \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

Poznamenejme, že skalární součiny dvou slabě konvergentních posloupností nemusí konvergovat ke skalárnímu součinu jejich slabých limit. Abychom se o tom přesvědčili, stačí položit například

$$v_k(x) = w_k(x) = \sin kx \text{ pro } x \in (0, \pi).$$

Pak $v_k \rightharpoonup 0$, $w_k \rightharpoonup 0$ a

$$\langle v_k, w_k \rangle = \int_0^\pi v_k(x) w_k(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Definice 4.14. *Operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ se nazývá demispojité, jestliže*

$$(4.40) \quad v_k \rightharpoonup v \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}v_k \rightharpoonup \mathbb{A}v \quad (\text{slabě}).$$

Věta 4.15. *Necht' $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je monotónní a demispojité operátor. Pak množina řešení rovnice $\mathbb{A}u = b$ je konvexní a uzavřená pro každé $b \in V$.*

D ů k a z . Nejprve ukážeme, že

$$(4.41) \quad \langle b - \mathbb{A}v, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}u = b.$$

Necht' tedy $w \in V$ je libovolné a necht'

$$(4.42) \quad v_s = u - sw, \quad s > 0.$$

Potom podle předpokladu v (4.41) platí

$$\langle b - \mathbb{A}v_s, u - v_s \rangle \geq 0$$

a (4.42) implikuje, že $0 \leq s \langle b - \mathbb{A}v_s, w \rangle$, tj.

$$0 \leq \langle b - \mathbb{A}v_s, w \rangle = \langle b - \mathbb{A}(u - sw), w \rangle.$$

Jelikož $\mathbb{A}$ je demispojité, platí

$$\mathbb{A}(u - sw) \rightharpoonup \mathbb{A}u \quad \text{pro } s \rightarrow 0.$$

Tudíž podle lemmatu 4.13

$$0 \leq \langle b - \mathbb{A}u, w \rangle \quad \forall w \in V.$$

Protože w bylo zvoleno libovolně, dostáváme rovnost $\mathbb{A}u = b$.

Pokud je množina řešení prázdná nebo obsahuje jen jeden bod, je zřejmě konvexní. Předpokládejme tedy, že $u_1, u_2 \in V$ jsou dvě různá řešení (4.1), a necht

$$u_t = tu_1 + (1-t)u_2$$

pro nějaké $t \in (0, 1)$. Protože $\mathbb{A}$ je monotónní, platí

$$\langle b - \mathbb{A}v, u_t - v \rangle = t\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}v, u_1 - v \rangle + (1-t)\langle \mathbb{A}u_2 - \mathbb{A}v, u_2 - v \rangle \geq 0$$

pro každé $v \in V$. Podle (4.41) je proto $\mathbb{A}u_t = b$.

Dále ukážeme, že množina řešení je uzavřená. Necht tedy $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset V$ je posloupnost řešení (4.1) a necht $u_k \rightarrow u$ pro nějaké $u \in V$. Pak z lemmatu 4.13 a z monotonie $\mathbb{A}$ pro každé $v \in V$ dostaneme

$$\langle b - \mathbb{A}v, u - v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle b - \mathbb{A}v, u_k - v \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k - \mathbb{A}v, u_k - v \rangle \geq 0.$$

Užijeme-li opět implikaci (4.41), zjistíme, že $\mathbb{A}u = b$. $\square$

Definice 4.16. Operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ se nazývá *koercivní*, jestliže

$$(4.43) \quad \lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathbb{A}v, v \rangle}{\|v\|_V} = \infty.$$

Poznámka 4.17. Pokud je operátor $\mathbb{A}$ spojitý (nebo lipschitzovsky spojitý), pak je demispojitý, ale obrácená implikace obecně neplatí. Také je snadno vidět, že každý silně monotónní operátor je koercivní, neboť z (4.5) máme

$$\langle \mathbb{A}v - \mathbb{A}0, v \rangle \geq C\|v\|_V^2 \quad \forall v \in V,$$

kde $C > 0$ nezávisí na v . Tudíž

$$\frac{\langle \mathbb{A}v, v \rangle}{\|v\|_V} \geq \frac{\langle \mathbb{A}0, v \rangle}{\|v\|_V} + C\|v\|_V \geq -\|\mathbb{A}0\|_V + C\|v\|_V \rightarrow \infty \text{ pro } \|v\|_V \rightarrow \infty.$$

Abychom ilustrovali základní myšlenku pojmu „koercivní operátor“, omezíme se nejprve na konečně-rozměrné prostory.

Věta 4.18. Necht $\mathbb{A} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitý koercivní operátor. Pak je rovnice $\mathbb{A}x = b$ řešitelná pro každé $b \in \mathbb{R}^k$.

Důkaz tohoto tvrzení bude podán později. Je založen na následujících dvou větách:

Věta 4.19. (Brouwerova věta o pevném bodě). Necht $\mathcal{B} \subset X$ je neprázdná uzavřená koule v normovaném konečně-rozměrném prostoru X . Necht S je spojitý operátor, který zobrazuje kouli $\mathcal{B}$ do sebe, tj. $S(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. Pak existuje $x \in \mathcal{B}$ takové, že $Sx = x$.

Důkaz viz např. [17], str. 252–253.

Věta 4.20. *Nechť $r > 0$ je dáno, nechť $(\cdot, \cdot)$, resp. $\|\cdot\|$, je standardní skalární součin, resp. euklidovská norma, v $\mathbb{R}^k$ a nechť $\mathbb{B} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ je spojitý operátor takový, že*

$$(4.44) \quad (\mathbb{B}x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = r.$$

Pak existuje $x \in \mathbb{R}^k$ tak, že $\mathbb{B}x = 0$ a $\|x\| \leq r$.

D ů k a z . Předpokládejme naopak, že $\mathbb{B}x \neq 0$ pro všechna x z uzavřené koule

$$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq r\}.$$

Potom je operátor

$$S : x \mapsto -r \frac{\mathbb{B}x}{\|\mathbb{B}x\|}$$

spojité zobrazení z $\mathcal{B}_r$ do $\mathcal{B}_r$. Podle Brouwerovy věty 4.19 existuje bod $x \in \mathcal{B}_r$ takový, že

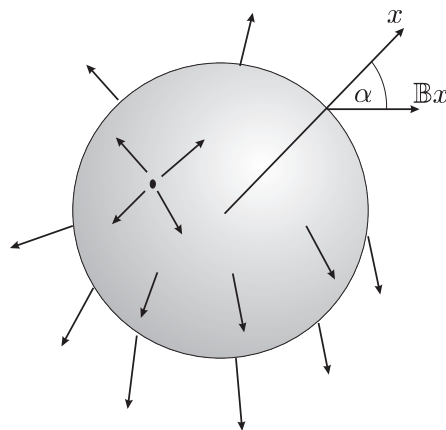
$$(4.45) \quad x = -r \frac{\mathbb{B}x}{\|\mathbb{B}x\|}.$$

Zřejmě $\|x\| = r$ a podle (4.45) je

$$(\mathbb{B}x, x) = (\mathbb{B}x, -r\mathbb{B}x/\|\mathbb{B}x\|) = -r\|\mathbb{B}x\| < 0,$$

což odporuje (4.44). $\square$

Poznámka 4.21. Geometrické znázornění podmínky (4.44) je takové, že úhel mezi vektory $\mathbb{B}x$ a x není větší než pravý úhel na povrchu koule $\mathcal{B}_r$, tj. vektory $\mathbb{B}x$ mají na povrchu „centrifugální orientaci“ (viz obr. 4.4 pro $k = 3$).



Obr. 4.4

D ů k a z v ě t y 4.18. Z koercivity (4.43) pro dané $b \in \mathbb{R}^k$ existuje dostatečně velké $r > 0$ takové, že

$$(\mathbb{A}x - b, x) \geq (\mathbb{A}x, x) - \|b\|\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \|x\| = r.$$

Zbytek důkazu plyne z věty 4.20 pro $\mathbb{B}x = \mathbb{A}x - b$. $\square$

Nyní aplikujeme předchozí výsledky z $\mathbb{R}^k$ také na nekonečněrozměrné separabilní prostory, abychom dokázali hlavní větu o monotónních operátorech. Připomeňme, že Hilbertův prostor se nazývá *separabilní*, jestliže obsahuje spočetnou hustou podmnožinu. Následující věta je ve skutečnosti modifikací známé Mintyovy-Browderovy věty (viz např. [19], par. III.2.1), kde se místo „radiálně spojitého“ operátoru uvažuje operátor demispojité. Její důkaz je konstruktivní, užívající Galerkinovy aproximace (viz (4.52)). To představuje základ řady numerických metod.

Věta 4.22. *(Hlavní věta o monotónních operátorech.) Necht' V je separabilní Hilbertův prostor a necht' $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ je monotónní demispojité a koercivní operátor. Pak množina řešení rovnice $\mathbb{A}u = b$ je neprázdná konvexní a uzavřená pro každé $b \in V$.*

D ů k a z . Díky větě 4.15 stačí jen dokázat, že existuje alespoň jedno řešení.

Nejprve zkonstruujeme Galerkinovy aproximace problému (4.2). Protože V je separabilní, existuje úplný systém (konečný nebo nekonečný spočetný) lineárních nezávislých vektorů $\{v^i\} \subset V$ (tzv. Schauderova báze), tj. lineární obal $\{v^i\}$ je hustý ve V . Pro $k = 1, 2, \dots$ položme

$$V_k = \text{span}(v^1, \dots, v^k).$$

Pak

$$(4.46) \quad x = (x_1, \dots, x_k) \mapsto u_k = \sum_{i=1}^k x_i v^i$$

definuje spojitě lineární vzájemně jednoznačné zobrazení F prostoru $\mathbb{R}^k$ na V_k ,

$$(4.47) \quad Fx = u_k.$$

Z ekvivalence norem v každém konečněrozměrném prostoru dostaneme, že podle (4.47) existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$(4.48) \quad \|x\| \leq C \|Fx\|_V = C \|u_k\|_V.$$

Definujme operátor $\mathbb{B} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ vztahem

$$(4.49) \quad \mathbb{B}x = (y_1, \dots, y_k),$$

kde

$$(4.50) \quad y_i = \langle \mathbb{A}Fx - b, v^i \rangle.$$

Jestliže $x^j \rightarrow x$ pro $j \rightarrow \infty$, pak zřejmě $Fx^j \rightarrow Fx$ a z demispojitosti $\mathbb{A}$ máme, že

$$\langle \mathbb{A}Fx^j - b, v^i \rangle \rightarrow \langle \mathbb{A}Fx - b, v^i \rangle, \quad i = 1, \dots, k.$$

Tudíž je $\mathbb{B}$ spojitý.

Z koercivity $\mathbb{A}$ pro dostatečně velká $r_1 > 0$ plyne

$$(4.51) \quad \left(\frac{\langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle}{\|u_k\|_V} - \|b\|_V \right) \|u_k\|_V \geq 0 \quad \text{pro } \|u_k\|_V \geq r_1.$$

Z (4.49), (4.50), (4.46) a (4.51) nyní vidíme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^k$ splňující (viz (4.48))

$$\|x\| = r = Cr_1,$$

platí

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}x, x) &= \sum_{i=1}^k x_i y_i = \sum_{i=1}^k x_i \langle \mathbb{A}u_k - b, v^i \rangle = \langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle - \langle b, u_k \rangle \\ &\geq \left(\frac{\langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle}{\|u_k\|_V} - \|b\|_V \right) \|u_k\|_V \geq 0. \end{aligned}$$

Podle věty 4.20 tedy existuje $x \in \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\mathbb{B}x = 0.$$

Z (4.49) a (4.50) pro $u_k = Fx$ obdržíme následující Galerkinův systém

$$(4.52) \quad \langle \mathbb{A}u_k, v^i \rangle = \langle b, v^i \rangle, \quad i = 1, \dots, k.$$

Speciálně

$$(4.53) \quad \langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle = \langle b, u_k \rangle,$$

což dává

$$\frac{\langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle}{\|u_k\|_V} \leq \|b\|_V.$$

Tudíž z koercivity $\mathbb{A}$ dostaneme, že posloupnost $\{u_k\}$ je ohraničená,

$$(4.54) \quad \|u_k\|_V \leq C_1.$$

Navíc z (4.53) a (4.54)

$$(4.55) \quad \langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle \leq C_2$$

nezávisle na k . Nyní z lemmatu 4.12, (4.54) a (4.55) dostaneme

$$(4.56) \quad \|\mathbb{A}u_k\|_V \leq C \quad \text{pro všechna } k = 1, 2, \dots$$

Nechť $v \in \bigcup_k V_k$ je dáno, tj. existuje přirozené číslo $k_0(v)$ tak, že $v \in V_k$ pro všechna $k \geq k_0(v)$. Podle vztahu (4.52) je

$$\langle \mathbb{A}u_k, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall k \geq k_0(v),$$

a tedy platí

$$(4.57) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in \overline{\bigcup_k V_k}.$$

Tudíž z lemmatu 4.10, (4.56) a (4.57) plyne, že

$$(4.58) \quad \mathbb{A}u_k \rightharpoonup b \quad \text{ve } V.$$

Vztah (4.54) implikuje, že existuje podposloupnost $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, která slabě konverguje k některému prvku $u \in V$. Pro jednoduchost označme tuto podposloupnost opět $\{u_k\}$. Ukážeme, že toto u je řešením problému $\mathbb{A}u = b$.

Z (4.53) obdržíme

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle b, u_k \rangle = \langle b, u \rangle.$$

Odtud a z (4.58) dostaneme pro každé $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle b - \mathbb{A}v, u - v \rangle &= \langle b, u \rangle - \langle b, v \rangle - \langle \mathbb{A}v, u - v \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k, u_k \rangle - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k, v \rangle - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}v, u_k - v \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mathbb{A}u_k - \mathbb{A}v, u_k - v \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost plyne z monotonie $\mathbb{A}$. Nyní (4.41) implikuje, že $\mathbb{A}u = b$. $\square$

Příklad 4.23. Vraťme se k problému z paragrafu 4.2. Jestliže např. (4.20) neplatí, pak nejsme schopni dokázat, že operátor $\mathbb{A}$ je lipschitzovsky spojitý. Nicméně můžeme prověřit, zda jsou všechny předpoklady věty 4.22 splněny.

Poznamenejme ještě, že prostor $H^1(\Omega)$ je separabilní. Příklad spočetné množiny, která je hustá v tomto prostoru, je množina všech polynomů s racionálními koeficienty.

Více o řešení eliptických problémů monotónního typu metodou konečných prvků se můžete dočíst ve [14], [33], [69].

5. STACIONÁRNÍ ÚLOHA SÁLÁNÍ TEPLA

5.1. Gâteauxův a Fréchetův diferenciál

V paragrafu 5.2 ukážeme, že stacionární úlohu sálání tepla lze převést na minimalizaci hladkého nekvadratického funkcionálu J na konvexní a uzavřené podmnožině Banachova prostoru V . K tomuto účelu nejprve krátce připomeneme některé základní definice týkající se diferencovatelnosti J , protože ty se občas v literatuře liší.

Nechť V je Banachův prostor, $v, w \in V$ a nechť J je funkcionál definovaný na otevřeném okolí bodu v . Předpokládejme, že limita

$$J'(v; w) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(v + tw) - J(v)}{t}$$

existuje a je konečná. Pak číslo $J'(v; w)$ nazveme (směrovou) *derivací funkcionálu J v bodě v ve směru w* . Nechť operátor $J'(v; \cdot) : w \in V \mapsto J'(v; w) \in \mathbb{R}^1$ je navíc lineární a spojitý. Pak se nazývá *Gâteauxův diferenciál* funkcionálu J v bodě v . Poznamenejme, že někteří autoři (viz např. [12], str. 23) uvažují předchozí limitu jen pro $t \rightarrow 0+$, což dává jinou definici směrové derivace.

Nechť $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá bilineární V -eliptická forma a F lineární spojitý funkcionál na V . Potom se lze snadno přesvědčit, že Gâteauxův diferenciál kvadratického funkcionálu $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$ je dán vztahem (srov. (2.18))

$$J'(v; w) = a(v, w) - F(w), \quad v, w \in V.$$

Pokud existuje lineární spojitý operátor $J'(v)(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}^1$ takový, že

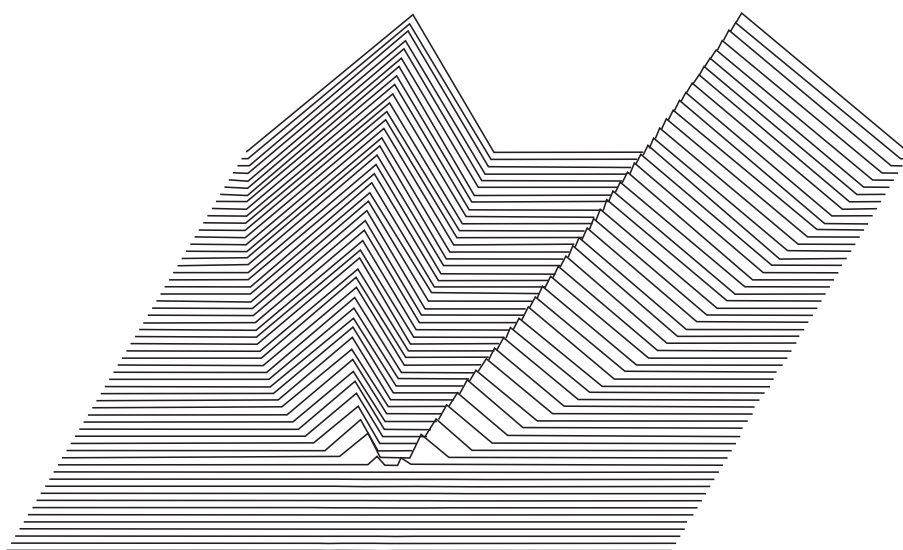
$$\lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in V}} \frac{|J(v + w) - J(v) - J'(v)(w)|}{\|w\|_V} = 0,$$

pak se tento operátor nazývá *Fréchetův* (nebo *totální*) *diferenciál* funkcionálu J v bodě v .

Je známo, že existence Fréchetova diferenciálu v nějakém bodě $v \in V$ implikuje existenci Gâteauxova diferenciálu ve v a oba diferenciály se v tomto případě rovnají, tj. $J'(v)(w) = J'(v; w)$ pro všechny směry $w \in V$. Abychom se přesvědčili, že obrácená implikace neplatí, stačí položit $V = \mathbb{R}^2$ a

$$J(x_1, x_2) = \begin{cases} 2|x_1| - \sqrt{x_2} & \text{pro } x_2 < 4x_1^2 \text{ a } x_2 \geq x_1^2, \\ 2\sqrt{x_2} - |x_1| & \text{pro } x_2 < x_1^2 \text{ a } x_2 \geq \frac{1}{4}x_1^2, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Graf tohoto funkcionálu je znázorněn na obrázku 5.1.



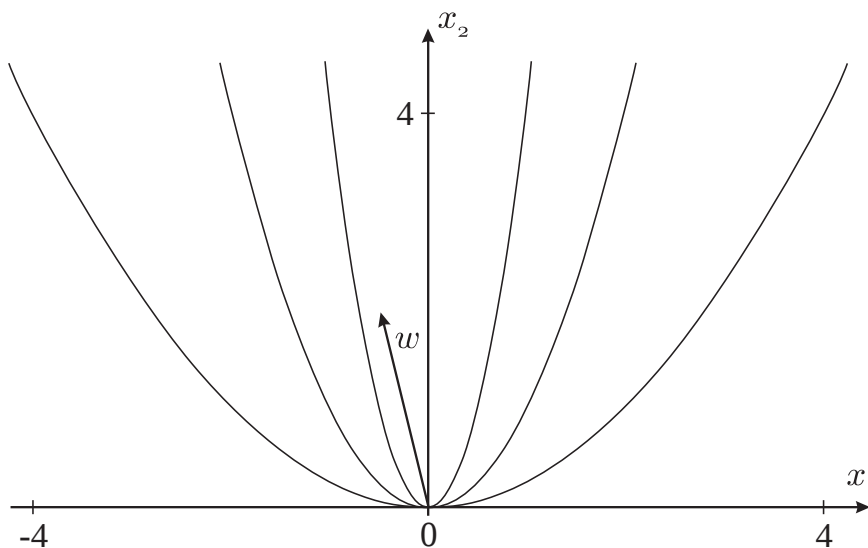
Obr. 5.1

Vidíme, že J je spojitý a že jsou všechny směrové derivace J v počátku nulové (srov. obr. 5.2). Tedy Gâteauxův diferenciál v 0 existuje a $J'(0; \cdot) = 0$. Na druhé straně Fréchetův diferenciál v 0 neexistuje, protože pro $w_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$, $k = 1, 2, \dots$, dostaneme

$$w_k \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty$$

a

$$\frac{|J(w_k) - J(0) - J'(0; w_k)|}{\|w_k\|} = \frac{|k^{-1} - 0 - 0|}{\sqrt{k^{-2} + k^{-4}}} \rightarrow 1 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty.$$



Obr. 5.2

Snadno nahlédneme, že existence Fréchetova diferenciálu J ve $v \in V$ implikuje spojitost J ve v . To

ale nemusí platit pro Gâteauxův diferenciál. K tomu stačí mírně modifikovat předchozí příklad. Položme

$$\tilde{J}(x_1, x_2) = \begin{cases} J(x_1, x_2)/|x_1| & \text{pro } x_1 \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x_1 = 0. \end{cases}$$

Pak je funkcionál $\tilde{J}$ roven 1 na parabole $x_2 = x_1^2$ kromě bodu 0, kde je nespojitost $\tilde{J}$, protože $\tilde{J}(0) = 0$. Avšak všechny směrové derivace $\tilde{J}$ v bodě 0 existují a $\tilde{J}'(0; \cdot) = 0$.

5.2. Klasická a variační formulace

Z fyziky je známo, že těleso ztrácí tepelnou energii ze svého povrchu elektromagnetickým zářením. Tento jev se nazývá sálání. Tepelné ztráty jsou úměrné čtvrté mocnině povrchové teploty (Kirchhoffův zákon). Sálání je velice malé při pokojové teplotě, ale nemělo by být zanedbáváno, když je povrchová teplota vysoká (např. při výpočtu rozložení teploty u suchých transformátorů, které nejsou chlazeny olejem, nebo u rotačních elektrických strojů). Je charakterizováno nelineární okrajovou podmínkou

$$\alpha(u - u_0) + n^T \mathcal{A} \text{grad } u + \beta(u^4 - u_0^4) = \tilde{g},$$

kde $\alpha \geq 0$ je koeficient konvektivního přestupu (přenosu) tepla, u je teplota vyšetřovaného tělesa, u_0 je teplota okolí, n je vnější jednotková normála k povrchu, $\mathcal{A}$ je symetrická stejnoměrně pozitivně definitní matice tepelných vodivostí, $\beta = \sigma f_{\text{em}}$, $\sigma = 5.669 \times 10^{-8} [\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}]$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta, $0 \leq f_{\text{em}} \leq 1$ je relativní funkce emisivity a $\tilde{g}$ je hustota povrchových tepelných zdrojů.

Uvažujme následující klasickou formulaci problému sálání tepla se smíšenými okrajovými podmínkami: Nalézt $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$, tak, aby

$$(5.1) \quad \begin{aligned} -\text{div}(\mathcal{A} \text{grad } u) &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= \bar{u} \quad \text{na } \Gamma_1, \\ \alpha u + n^T \mathcal{A} \text{grad } u + \beta u^4 &= g \quad \text{na } \Gamma_2, \end{aligned}$$

kde pro jednoduchost předpokládáme, že všechny funkce jsou hladké, $\Omega \in \mathcal{L}$ je dvojrozměrná oblast, Γ_1 a Γ_2 jsou neprázdné množiny, f je hustota objemových tepelných zdrojů, $\bar{u} \geq 0$ je předepsaná teplota a

$$g = \tilde{g} + \alpha u_0 + \beta u_0^4.$$

Podmínka na Γ_2 se nazývá *Stefanova-Boltzmannova okrajová podmínka*.

Protože klasické řešení úlohy (5.1) nemusí existovat, uvedeme její slabou formulaci. K tomu účelu budeme předpokládat, že prvky matice $\mathcal{A}$ patří do $L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in H^1(\Omega)$, $\alpha, \beta \in L^\infty(\Gamma_2)$ a $g \in L^2(\Gamma_2)$. Zavedme si prostor testovacích funkcí

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_1\},$$

konvexní množinu

$$U = \{v \in H^1(\Omega) \mid v \geq 0 \text{ v } \Omega, v = \bar{u} \text{ na } \Gamma_1\},$$

symetrickou bilineární formu

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T \mathcal{A} \text{grad } w \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha v w \, ds, \quad v, w \in H^1(\Omega),$$

a lineární spojitou formu

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, ds, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Připomeňme, že podmínka V -eliptičnosti formy $a(\cdot, \cdot)$,

$$(5.2) \quad a(v, v) \geq C \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V,$$

plyne z Friedrichsovy nerovnosti (2.32).

Nechť $v \in U$ je libovolné a necht' řešení $u \in U$ úlohy (5.1) existuje. Vynásobíme-li první rovnici v (5.1) funkcí $v - u \in V$, pak integrací přes Ω a z Greenovy věty 2.10 dostaneme následující variační rovnici

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u)^T \mathcal{A} \text{grad } (v - u) \, dx - \int_{\partial\Omega} n^T (\mathcal{A} \text{grad } u)(v - u) \, ds = \int_{\Omega} f(v - u) \, dx \quad \forall v \in U,$$

a tedy

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_2} \beta u^4 (v - u) \, ds = F(v - u) \quad \forall v \in U.$$

Odtud plyne, že u také splňuje variační nerovnici

$$(5.3) \quad a(u, v - u) + \int_{\Gamma_2} \beta u^4 (v - u) \, ds \geq F(v - u) \quad \forall v \in U.$$

Funkce $u \in U$ splňující (5.3) se nazývá *slabé řešení* klasického problému (5.1). Je jasné, že každé klasické řešení je zároveň slabým řešením. Vztah mezi klasickým a slabým řešením je diskutován v [38]. Pomocí teorie potenciálu později ukážeme, že existuje právě jedno slabé řešení $u \in U$ variační nerovnice (5.3).

Definujme funkcionál potenciální energie

$$(5.4) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{1}{5} \int_{\Gamma_2} \beta v^5 \, ds - F(v), \quad v \in H^1(\Omega).$$

Podle věty o stopách [41], str. 84–86, pro $d = 2$ a $q \in [1, \infty)$ existuje jediné lineární spojitě zobrazení $Z : H^1(\Omega) \rightarrow L^q(\partial\Omega)$ takové, že pro každé $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ platí $Zv = v$ na $\partial\Omega$, tj.

$$(5.5) \quad \|v\|_{0,q,\partial\Omega} \leq C_q \|v\|_{1,2,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

(srov. (2.26)). Tudíž je hraniční integrál v (5.4) konečný a funkcionál J je tak dobře definován.

Pomocí (5.4) můžeme snadno vypočítat směrovou derivaci J v bodě $v \in H^1(\Omega)$ ve směru $w \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} (5.6) \quad J'(v; w) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J(v + tw) - J(v)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} a(v, v) + t a(v, w) + \frac{1}{2} t^2 a(w, w) - \frac{1}{2} a(v, v) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_2} \beta \left(\frac{1}{5} v^2 + t v^4 w + 2 t^2 v^3 w^2 + 2 t^3 v^2 w^3 + t^4 v w^4 + \frac{1}{5} t^5 w^5 - \frac{1}{5} v^2 \right) ds - t F(w) \right) \\ &= a(v, w) + \int_{\Gamma_2} \beta v^4 w \, ds - F(w). \end{aligned}$$

Podobně nalezneme vyjádření pro druhou směrovou derivaci J ,

$$(5.7) \quad J''(v; w, w) = a(w, w) + 4 \int_{\Gamma_2} \beta v^3 w^2 \, ds, \quad v, w \in H^1(\Omega).$$

Lemma 5.1. *Funkcionál J je spojitý na $H^1(\Omega)$ v normě $\|\cdot\|_1$ a je ryze konvexní na množině U .*

D ů k a z . Abychom prověřili spojitost J , stačí dokázat, že Gâteauxův diferenciál J je Fréchetův diferenciál, tj. ukážeme, že pro každé $v \in H^1(\Omega)$

$$(5.8) \quad \lim_{\substack{w \rightarrow 0 \\ w \in H^1(\Omega)}} \frac{|J(v+w) - J(v) - J'(v; w)|}{\|w\|_1} = 0.$$

Ze vztahů (5.4), (5.6), spojitosti $a(\cdot, \cdot)$, Hölderovy nerovnosti, rovnosti $\|w^j\|_{0,5/j,\partial\Omega} = \|w\|_{0,5,\partial\Omega}^j$ pro $j = 1, \dots, 5$ a z nerovnosti (5.5) dostáváme

$$(5.9) \quad \begin{aligned} |J(v+w) - J(v) - J'(v; w)| &= \frac{1}{2}a(v, v) + a(v, w) + \frac{1}{2}a(w, w) - \frac{1}{2}a(v, v) - a(v, w) \\ &+ \int_{\Gamma_2} \beta \left(\frac{1}{5}v^5 + v^4w + 2v^3w^2 + 2v^2w^3 + vw^4 + \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{5}v^5 - v^4w \right) ds - F(w) + F(w) \\ &\leq \frac{1}{2}a(w, w) + \int_{\Gamma_2} \beta |2v^3w^2 + 2v^2w^3 + vw^4 + \frac{1}{5}w^5| \, ds \\ &\leq C_1\|w\|_1^2 + C_2(\|v\|_{0,5,\partial\Omega}^3\|w\|_{0,5,\partial\Omega}^2 + \|v\|_{0,5,\partial\Omega}^2\|w\|_{0,5,\partial\Omega}^3 + \|v\|_{0,5,\partial\Omega}\|w\|_{0,5,\partial\Omega}^4 + \|w\|_{0,5,\partial\Omega}^5) \\ &\leq C(\|w\|_1^2 + \|v\|_1^3\|w\|_1^2 + \|v\|_1^2\|w\|_1^3 + \|v\|_1\|w\|_1^4 + \|w\|_1^5) \leq C(v)\|w\|_1^2, \end{aligned}$$

kdykoliv $\|w\|_1 \leq 1$. Tedy (5.8) platí a J je spojitý.

Z (5.7) a (5.2) vidíme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$(5.10) \quad J''(v; w, w) \geq C\|w\|_1^2 \quad \forall v \in U \quad \forall w \in V.$$

To znamená, že funkcionál J je ryze konvexní na U , což završuje důkaz. $\square$

Poznámka 5.2. Funkcionál J není konvexní na celém prostoru $H^1(\Omega)$ díky členu $\frac{1}{5} \int_{\Gamma_2} \beta v^5 \, ds$. Proto jsme se omezili jen na množinu nezáporných funkcí. To je v souladu s fyzikou, neboť teplota nemůže klesnout pod 0 [K]. Tak ale dostáváme dvě nelinearity. První je obsažena ve Stefanově-Boltzmannově okrajové podmínce a druhá vzniká z omezení $v \geq 0$ v definici konvexní množiny U .

Věta 5.3. *Existuje právě jedno řešení variačního problému: Nalézt $u \in U$ tak, že*

$$(5.11) \quad J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

D ů k a z . Ze vztahů (5.4), (5.2) a spojitosti F existují kladné konstanty C_1, C_2 takové, že

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + \frac{1}{5} \int_{\Gamma_2} \beta v^5 \, ds - F(v) \geq C_1\|v\|_1^2 - C_2\|v\|_1 \quad \forall v \in U,$$

neboť integrál přes Γ_2 je nezáporný. Tedy funkcionál J je koercivní na U , tj.

$$(5.12) \quad J(v) \rightarrow \infty \quad \text{pro } \|v\|_1 \rightarrow \infty, \quad v \in U.$$

Nechť $\tilde{v} \in U$ je libovolné. Pak podle (5.12) existuje $r > 0$ tak, že pro každé $v \in U$, pro něž $\|v\|_1 > r$, platí

$$J(\tilde{v}) < J(v).$$

Proto je minimalizační problém (5.11) přes neohraničenou množinu U ekvivalentní minimalizaci J přes ohraničenou uzavřenou množinu

$$\tilde{U} = \{v \in U \mid \|v\|_1 \leq r\}.$$

Zbytek důkazu plyne z lemmatu 5.1 a dále je třeba použít následující věty (viz [17], str. 199). □

Věta 5.4. *Nechť $\tilde{U}$ je neprázdná konvexní uzavřená a ohraničená podmnožina v $H^1(\Omega)$. Nechť J je spojitý a konvexní funkcionál definovaný na $\tilde{U}$. Potom*

- (a) $\inf_{v \in \tilde{U}} J(v) > -\infty$;
- (b) *existuje alespoň jedno $u \in \tilde{U}$ takové, že*

$$J(u) = \inf_{v \in \tilde{U}} J(v);$$

- (c) *jestliže J je navíc ryze konvexní funkcionál na $\tilde{U}$, pak existuje právě jedno u s vlastností (b).*

Poznámka 5.5. Jediné řešení problému (5.11) se nazývá *variační (zobecněné) řešení*. Je známo (viz [7], str. 118), že minimalizace konvexního gâteauxovsky diferencovatelného funkcionálu J na konvexní podmnožině $U \subset H^1(\Omega)$ je ekvivalentní řešení následující variační nerovnice: Nalézt $u \in U$ tak, že

$$(5.13) \quad J'(u; v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Podle (5.6) nerovnost (5.13) vede na tvar (5.3). Tudíž existuje také právě jedno řešení variační nerovnice (5.3).

5.3. Konvergence metody konečných prvků

V tomto paragrafu budeme pro jednoduchost předpokládat, že $\Omega \in \mathcal{L}$ je polygonální. Budeme používat běžné lineární trojúhelníkové prvky. Nechť triangulace $\mathcal{T}_h$ vyšetřované oblasti splňují standardní podmínku konzistence, tj. ty body, ve kterých se mění jeden typ okrajové podmínky na jiný typ, patří do množiny vrcholů všech $K \in \mathcal{T}_h$ (viz par. 3.2). Nechť $\mathcal{F}$ je systém triangulací uzávěru $\overline{\Omega}$. Pro danou triangulaci $\mathcal{T}_h \in \mathcal{F}$ položíme

$$W_h = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h|_K \in P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Připomeňme, že funkce $\bar{u}$ (viz (5.1)) je nezáporná a že funkce z W_h jsou spojité (viz větu 3.1). Pro jednoduchost dále předpokládejme, že

$$(5.14) \quad \exists h_0 > 0 \forall h \in (0, h_0) : \bar{u} \in W_h.$$

Pak bude množina

$$U_h = U \cap W_h$$

neprázdná.

Podobně jako ve větě 5.3 můžeme dokázat, že pro dostatečně malé $h > 0$ existuje jediné řešení diskretizovaného problému: Nalézt $u_h \in U_h$ takové, že

$$(5.15) \quad J(u_h) = \inf_{v_h \in U_h} J(v_h),$$

kde J je definováno vztahem (5.4).

Abychom dokázali konvergenci $u_h \rightarrow u$ pro $h \rightarrow 0$ bez dodatečných předpokladů na hladkost u , budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 5.6. *Nechť $\mathcal{F}$ je systém triangulací $\bar{\Omega}$ splňující podmínku maximálního úhlu, tj. všechny úhly všech trojúhelníků v triangulaci jsou ohraničené shora danou konstantou menší než π . Pak $\bigcup_{h \in (0, h_0)} U_h$ je hustá v U v normě $\|\cdot\|_1$.*

Důkaz viz [38]. Poznamenejme ještě, že podmínka na maximální úhel je slabší než Zlámalova podmínka na minimální úhel (viz poznámku 3.5).

Věta 5.7. *Nechť $\mathcal{F}$ je systém triangulací uzávěru $\bar{\Omega}$ splňující podmínku maximálního úhlu. Pak*

$$\|u - u_h\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0,$$

kde u , resp. u_h , je jediné řešení (5.11), resp. (5.15).

D ů k a z . Podle lemmatu 5.6 existuje posloupnost $\{v_h\}$ taková, že $v_h \in U_h$ a

$$(5.16) \quad \|u - v_h\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

Zřejmě

$$(5.17) \quad J(u) \leq J(u_h) \leq J(v_h).$$

Podle lemmatu 5.1 je funkcional J spojitý, a proto vztahy (5.16) a (5.17) dávají

$$(5.18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} J(u_h) = J(u).$$

Taylorův rozvoj J v bodě u má tvar (viz [7], str. 52)

$$(5.19) \quad J(u_h) = J(u) + J'(u; u_h - u) + \frac{1}{2} J''(u + \theta_h(u_h - u); u_h - u, u_h - u),$$

kde $\theta_h \in (0, 1)$. Z (5.13), (5.10) a (5.19) máme

$$\begin{aligned}
 (5.20) \quad C\|u - u_h\|_1^2 &\leq C\|u - u_h\|_1^2 + J'(u; u_h - u) \\
 &\leq \frac{1}{2}J''(u + \theta_h(u_h - u); u_h - u, u_h - u) + J'(u; u_h - u) \\
 &= J(u_h) - J(u),
 \end{aligned}$$

kde $C > 0$ je nezávislá na h . Odtud a z (5.18) vidíme, že $\|u - u_h\|_1 \rightarrow 0$, když $h \rightarrow 0$. $\square$

Pokud je variační řešení u dostatečně hladké, dostaneme dokonce lineární rychlost konvergence v normě $\|\cdot\|_1$.

Věta 5.8. *Nechť platí předpoklady věty 5.7, $u \in H^2(\Omega)$ a nechť existuje konstanta C_u tak, že $u \geq C_u > 0$ v Ω . Pak*

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch \quad \text{pro } h \rightarrow 0.$$

D ů k a z . Buď $w \in V \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ libovolná funkce taková, že $\|w\|_{C(\overline{\Omega})} < C_u$. Pak $u + w, u - w \in U$. Položíme-li $v = u \pm w$ v (5.13), shledáme, že $J'(u; w) \geq 0$ a $J'(u; -w) \geq 0$. Nyní z linearit $J'(u; \cdot)$ a hustoty $V \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ ve V (viz [11], str. 618) dostaneme známou nutnou Eulerovu podmínku pro extrém:

$$(5.21) \quad J'(u; v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Protože $u \in H^2(\Omega)$, ze Sobolevovy věty o vnoření 2.11 plyne, že je funkce u spojitá. Z (5.14) vidíme, že $\pi_h u \in U_h$, kde $\pi_h u$ je standardní lineární interpolace u . Tedy

$$(5.22) \quad J(u_h) \leq J(\pi_h u),$$

jak plyne z (5.15). Použijeme-li nyní (5.20), (5.22), (5.21), (5.9) a standardní interpolační vlastnosti (viz [33], str. 72), máme

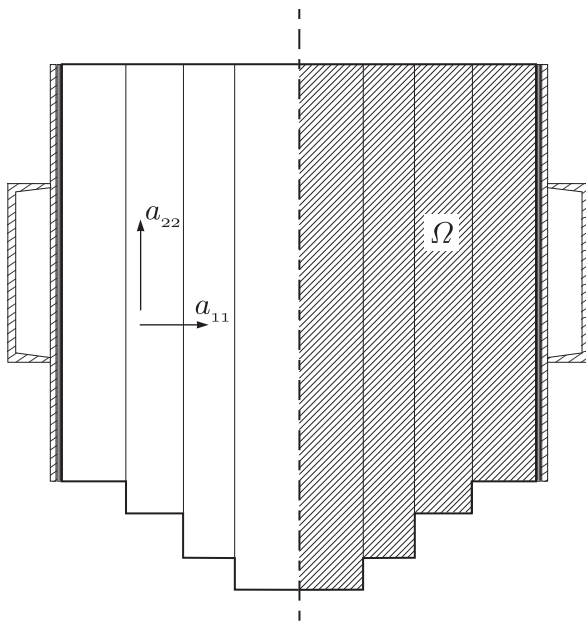
$$\begin{aligned}
 C_1\|u - u_h\|_1^2 &\leq J(u_h) - J(u) \leq J(\pi_h u) - J(u) \\
 &= J(\pi_h u) - J(u) - J'(u; \pi_h u - u) \leq C(u)\|u - \pi_h u\|_1^2 \leq C_2 h^2,
 \end{aligned}$$

kde $C_1, C_2 > 0$ jsou nezávislé na h (a C_2 závisí na u). $\square$

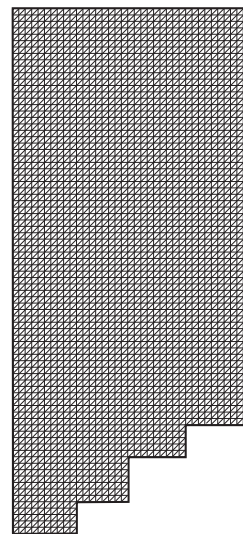
Veškeré výsledky tohoto paragrafu mohou být modifikovány na případ $\Gamma_1 = \emptyset$, pokud $\alpha > 0$ nebo $\beta > 0$ na nějaké množině kladné míry. Jako příklad můžeme vypočítat rozložení teploty v řezu spojky transformátoru – viz obr. 5.3. V (5.1) položme $f = 15000 \text{ [W/m}^3\text{]}$, $u_0 = 70 \text{ [}^\circ\text{C]}$, $\tilde{g} = 0$ a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

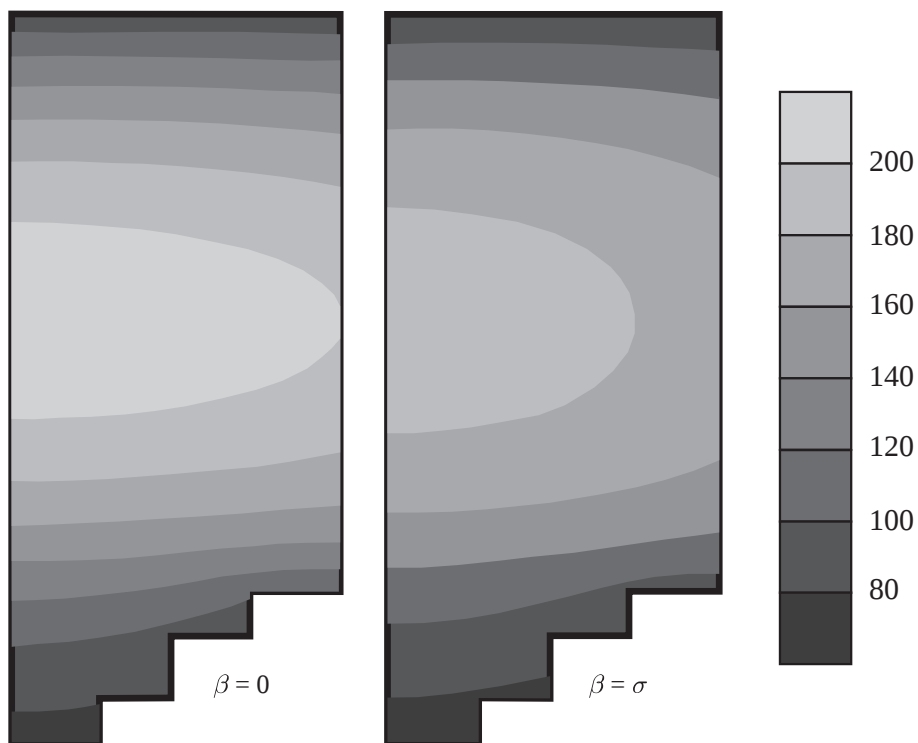
V důsledku symetrie lze teplotu počítat jen v pravé polovině průřezu. Na obrázku 5.4 jsou znázorněny příslušné po částech konstantní hodnoty koeficientu α a použitá triangulace. Obrázek 5.5 ukazuje vrstevnice teploty pro $\beta = 0$ a $\beta = \sigma$. Vidíme, že rozdíl numerických výsledků pro lineární problém (s $\beta = 0$) a nelineární problém (s $\beta = \sigma$) je dosti velký.



Obr. 5.3



Obr. 5.4



Obr. 5.5

Při formulaci trojrozměrných problémů vzniká potíž s definičním oborem funkcionálu J , protože stopy funkcí z $H^1(\Omega)$ obecně nemusí být z $L^5(\partial\Omega)$ (viz následující příklad).

Příklad 5.9. Na množině

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1, x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$$

uvažujme funkci $G(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^\alpha$, kde α je reálný parametr. Její funkční hodnoty ve standardních sférických souřadnicích (r, φ, θ) nezávisí na úhlech φ a θ , což znamená, že $\tilde{G}(r, \varphi, \theta) = r^\alpha$, kde $\tilde{G}(r, \varphi, \theta) = G(x_1, x_2, x_3)$ a

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$x_2 = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$x_3 = r \cos \theta.$$

Podle věty o substituci je

$$\|G\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \left(G^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x_3} \right)^2 \right) dx = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tilde{G}^2 + \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r} \right)^2 \right) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

a pro $\alpha > -\frac{1}{2}$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \|r^\alpha\|_1^2 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^{2\alpha} + \alpha^2 r^{2\alpha-2}) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^{2\alpha} + \alpha^2 r^{2\alpha-2}) r^2 \sin \theta \, d\theta \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (r^{2\alpha+2} + \alpha^2 r^{2\alpha}) \, dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2\alpha+3} + \frac{\alpha^2}{2\alpha+1} \right) \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Trojité integrál není konečný pro $\alpha \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$. (Vidíme také, že pro $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0)$ funkce r^α není spojitá, i když patří do $H^1(\Omega)$.)

Nyní ukážeme, že stopa funkce r^α je v $L^5(\partial\Omega)$, pouze když $\alpha > -\frac{2}{5}$. Zřejmě stačí vyšetřovat stopy jen na jednom ze tří čtvrtkruhů, které jsou obsaženy v $\partial\Omega$. Označme S ten čtvrtkruh, pro který $\theta = \frac{\pi}{2}$, tj.

$$S = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Potom

$$\|r^\alpha\|_{0,5,S}^5 = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{5\alpha} r \, d\varphi \, dr = \frac{\pi}{2(5\alpha+2)} \in (0, \infty)$$

právě tehdy, když $\alpha > -\frac{2}{5}$. Jestliže tedy $\alpha \in (-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}]$, pak $r^\alpha \in H^1(\Omega)$, ale stopa této funkce není v $L^5(\partial\Omega)$. $\square$

Pro $d = 3$ platí, že stopy funkcí z $H^1(\Omega)$ jsou v $L^4(\partial\Omega)$, tj. existuje konstanta $C > 0$ taková, že (viz [41], str. 84)

$$(5.23) \quad \|v\|_{0,4,\partial\Omega} \leq C \|v\|_{1,2,\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Pokud bychom definiční obor funkcionálu (5.4) omezili na $H^2(\Omega)$ (nebo $W_3^1(\Omega)$), pak by J nebyl koercivní na nezáporných funkcích z těchto prostorů vzhledem k normám $\|\cdot\|_2$ (nebo $\|\cdot\|_{1,3}$). Pro $d = 3$ se proto funkcionál J definuje na speciálních Banachových prostorech – viz [33].

Poznamenejme ještě, že podmínka podobná Stefanově-Boltzmannově okrajové podmínce také vzniká při matematickém modelování elektrolytických procesů – viz [15].

5.4. Monotónní potenciální operátory

Na závěr této kapitoly si ještě ukážeme, jak spolu souvisejí monotónní operátory a konvexní funkcionály. Symbolem V označíme Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definice 5.10. Operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ se nazývá *potenciální*, jestliže existuje funkcionál $J : V \rightarrow \mathbb{R}^1$ takový, že

$$(5.24) \quad \langle \mathbb{A}v, w \rangle = J'(v; w) \quad \forall v, w \in V .$$

Příklad 5.11. Na intervalu $\Omega = (0, 1)$ uvažujme nelineární diferenciální rovnici

$$-u'' + \psi(u) = f$$

s okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$, kde $f \in L^2(\Omega)$ a $\psi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ je funkce lipschitzovská nebo ohraničená a spojitá. Odpovídající operátor $\mathbb{A}$ je dán vztahem

$$(5.25) \quad \langle \mathbb{A}v, w \rangle = \int_0^1 (v'w' + \psi(v)w) dx, \quad v, w \in V ,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$. Integrál v (5.25) zřejmě existuje díky předpokladům na ψ . Nechť Ψ je primitivní funkce k ψ . Položíme-li

$$(5.26) \quad J(v) = \int_0^1 \left(\frac{(v')^2}{2} + \Psi(v) \right) dx, \quad v \in V ,$$

potom z definice Gâteauxova diferenciálu, (5.25) a (5.26) vidíme, že odpovídající operátor $\mathbb{A}$ je potenciální,

$$\begin{aligned} J'(v; w) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(v + tw) - J(v)}{t} = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(v' + tw')^2 - (v')^2}{2t} + \frac{\Psi(v + tw) - \Psi(v)}{t} \right) dx \\ &= \int_0^1 (v'w' + \psi(v)w) dx = \langle \mathbb{A}v, w \rangle \quad \forall v, w \in V . \end{aligned}$$

Limitu a integrál lze zřejmě zaměnit (viz [49]), neboť funkce Ψ je spojitá.

Nyní uvedeme důležitou větu, která názorně geometricky ilustruje pojem „monotónní potenciální operátor“.

Věta 5.12. Nechť $J : V \rightarrow \mathbb{R}^1$ má Gâteauxův diferenciál a nechť operátor $\mathbb{A}$ je definován vztahem (5.24). Pak je funkcionál J konvexní právě tehdy, když $\mathbb{A}$ je monotónní operátor.

D ů k a z . Nechť J je konvexní, $v_1, v_2 \in V$ jsou libovolné, $w = v_1 - v_2$ a nechť

$$(5.27) \quad j(t) = J(v_2 + tw), \quad t \in \mathbb{R}^1 .$$

Potom pro každé $\lambda \in [0, 1]$ a $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1$ platí

$$\begin{aligned} \lambda j(t_1) + (1 - \lambda)j(t_2) &= \lambda J(v_2 + t_1 w) + (1 - \lambda)J(v_2 + t_2 w) \\ &\geq J(\lambda(v_2 + t_1 w) + (1 - \lambda)(v_2 + t_2 w)) \\ &= j(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) , \end{aligned}$$

což znamená, že funkce j je také konvexní. Tudíž její derivace

$$(5.28) \quad j'(t) = J'(v_2 + tw; w)$$

je neklesající, a proto

$$0 \leq j'(1) - j'(0) = J'(v_1; v_1 - v_2) - J'(v_2; v_1 - v_2) = \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle .$$

Nechť naopak $\mathbb{A}$ je monotónní, $v_1, v_2 \in V$ libovolná, $w = v_1 - v_2$ a nechť funkce j je opět definována vztahem (5.27). Z monotonie pro každé $t_2 \geq t_1$ dostaneme, že

$$\langle \mathbb{A}(v_2 + t_2 w) - \mathbb{A}(v_2 + t_1 w), (t_2 - t_1)w \rangle \geq 0 .$$

Odtud, z (5.24), (5.27) a (5.28) vidíme, že j' je neklesající,

$$j'(t_2) = J'(v_2 + t_2 w; w) \geq J'(v_2 + t_1 w; w) = j'(t_1) .$$

Tedy j je konvexní,

$$j(\lambda) \leq \lambda j(1) + (1 - \lambda)j(0) \quad \forall \lambda \in [0, 1] ,$$

což vede k nerovnosti

$$J(\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2) \leq \lambda J(v_1) + (1 - \lambda)J(v_2) .$$

Odtud plyne, že také J je konvexní. $\square$

Věta 5.13. *Nechť platí předpoklady věty 5.12. Pak je funkcionál J ryze konvexní právě tehdy, když je $\mathbb{A}$ ostře monotónní operátor.*

Důkaz je podobný předchozímu důkazu se zřejmými modifikacemi. Uvažují se jen $v_1 \neq v_2$, $\lambda \in (0, 1)$, $t_1 \neq t_2$, neostře nerovnosti se zamění za ostré atd.

Připomeňme, že minimum ryze konvexního funkcionálu na konvexní množině nemusí existovat. (Stačí uvažovat funkcionál $J(v) = e^v$ pro $v \in \mathbb{R}^1$.) K existenci minima je třeba navíc předpokládat např. koercivitu, tj. $J(v) \rightarrow \infty$ pro $\|v\|_V \rightarrow \infty$.

Věta 5.14. *Nechť platí předpoklady věty 5.12. Pak J je ryze konvexní a koercivní, je-li $\mathbb{A}$ silně monotónní.*

D ů k a z . Protože každý silně monotónní operátor je zřejmě ostře monotónní, je podle věty 5.13 funkcionál J ryze konvexní. Stačí tedy dokázat jen jeho koercivitu.

Nechť $v, w \in V$ jsou libovolné. Protože J je konvexní, platí

$$J(w + \lambda(v - w)) \leq J(w) + \lambda(J(v) - J(w)), \quad \lambda \in (0, 1],$$

což dává

$$\frac{J(w + \lambda(v - w)) - J(w)}{\lambda} \leq J(v) - J(w),$$

a tedy pro $\lambda \rightarrow 0$ máme $J'(w, v - w) \leq J(v) - J(w)$. Odtud a ze vztahu (5.24) plyne tzv. věta o opěrném bodě funkcionálu (kde $\mathbb{A}w$ je opěrný funkcionál pro J)

$$J(v) \geq J(w) + J'(w; v - w) = J(w) + \langle \mathbb{A}w, v - w \rangle.$$

Položíme-li $w = \frac{v}{2}$ a $w = 0$, dostáváme

$$J(v) \geq J\left(\frac{v}{2}\right) + \left\langle \mathbb{A}\frac{v}{2}, \frac{v}{2} \right\rangle,$$

$$J\left(\frac{v}{2}\right) \geq J(0) + \langle \mathbb{A}0, \frac{v}{2} \rangle.$$

Sečtením obou těchto nerovností a ze silné monotonie (viz (4.5)) máme

$$J(v) \geq J(0) + \langle \mathbb{A}0, \frac{v}{2} \rangle + \left\langle \mathbb{A}\frac{v}{2}, \frac{v}{2} \right\rangle \geq J(0) - C_1\|v\|_V + C_2\|v\|_V^2,$$

kde $C_1, C_2 > 0$. Tedy $J(v) \rightarrow \infty$ pro $\|v\|_V \rightarrow \infty$. $\square$

Poznámka 5.15. Obrácená věta neplatí, tj. ryzí konvexita a koercivita J ještě nezaručují silnou monotonii potenciálního operátoru $\mathbb{A}$. Stačí např. uvažovat funkcionál $J(v) = \sqrt{v^2 + 1}$ pro $v \in \mathbb{R}^1$.

Příklad 5.16. Nechť funkce ψ z příkladu 5.11 je neklesající. Pak z (5.25) a Friedrichsovy nerovnosti plyne, že operátor $\mathbb{A}$ je silně monotónní,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}v_1 - \mathbb{A}v_2, v_1 - v_2 \rangle &= \int_0^1 (v'_1 - v'_2)(v'_1 - v'_2) dx + \int_0^1 (\psi(v_1) - \psi(v_2))(v_1 - v_2) dx \\ &\geq \int_0^1 (v'_1 - v'_2)^2 dx \geq C\|v_1 - v_2\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Příslušný funkcionál (5.26) je tedy ryze konvexní a koercivní.

Podle [7], str. 56, je každý konvexní funkcionál, jehož Gâteauxův diferenciál existuje, slabě zdola polospojité. Navíc každý koercivní a slabě zdola polospojité funkcionál nabývá svého minima na V (viz [7], str. 62). Odtud a z ryzí konvexity J pak plyne existence právě jednoho minima funkcionálu (5.26).

Snadno lze ověřit, že operátor $\mathbb{A}$ definovaný vztahem (5.25) je lipschitzovsky spojitý, jestliže funkce ψ je lipschitzovsky spojitá. Existence a jednoznačnost slabého řešení Dirichletovy okrajové úlohy z příkladu 5.11 pak plyne přímo z věty 4.4.

6. NELINEÁRNÍ ANIZOTROPNÍ VEDENÍ TEPLA V MAGNETICKÉM OBVODU TRANSFORMÁTORŮ

6.1. Nemonotonie a nepotencialita problému

V této kapitole se budeme zabývat kvazilineární eliptickou úlohou, jejíž klasická formulace zní:

Nalezněte $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tak, že $u|_{\Omega} \in C^2(\Omega)$ a

$$(6.1) \quad -\operatorname{div}(\mathcal{A}(\cdot, u)\operatorname{grad} u) = f \quad \text{v } \Omega,$$

$$(6.2) \quad u = \overline{u} \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(6.3) \quad \alpha u + n^T \mathcal{A}(\cdot, u)\operatorname{grad} u = g \quad \text{na } \Gamma_2,$$

kde $\Omega \in \mathcal{L}$, $n = (n_1, \dots, n_d)^T$ je vnější jednotková normála k $\partial\Omega$, $d \in \{1, 2, \dots\}$, Γ_1 a Γ_2 jsou relativně otevřené množiny vzhledem ke hranici $\partial\Omega$, $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ je stejnoměrně pozitivně definitní matice a $\alpha \geq 0$. Nechť prozatím jsou funkce $\mathcal{A}$, α , f , $\overline{u}$ a g dostatečně hladké (přesné předpoklady na tyto funkce uvedeme později). Podmínka (6.3) se nazývá *Newtonova okrajová podmínka*.

Tato kapitola je věnována problému ustáleného vedení tepla definovaného (6.1)–(6.3), který popisuje rozložení teploty ve velkých transformátorech. Jejich magnetický obvod (sestavající ze železných plechů) je tvořen nelineárním ortotropním materiálem, jehož tepelná vodivost může být vyjádřena pomocí diagonální matice $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u)$.

Uvažujme nejprve následující speciální případ úlohy (6.1)–(6.3), který popisuje stacionární vedení tepla v homogenním a izotropním prostředí v oblasti Ω ,

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\lambda(u)\operatorname{grad} u) &= f \quad \text{v } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \\ n^T \lambda(u)\operatorname{grad} u &= 0 \quad \text{na } \Gamma_2, \end{aligned}$$

kde $\lambda : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ je měřitelná ohraničená funkce taková, že

$$(6.4) \quad \lambda(\xi) \geq C > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^1.$$

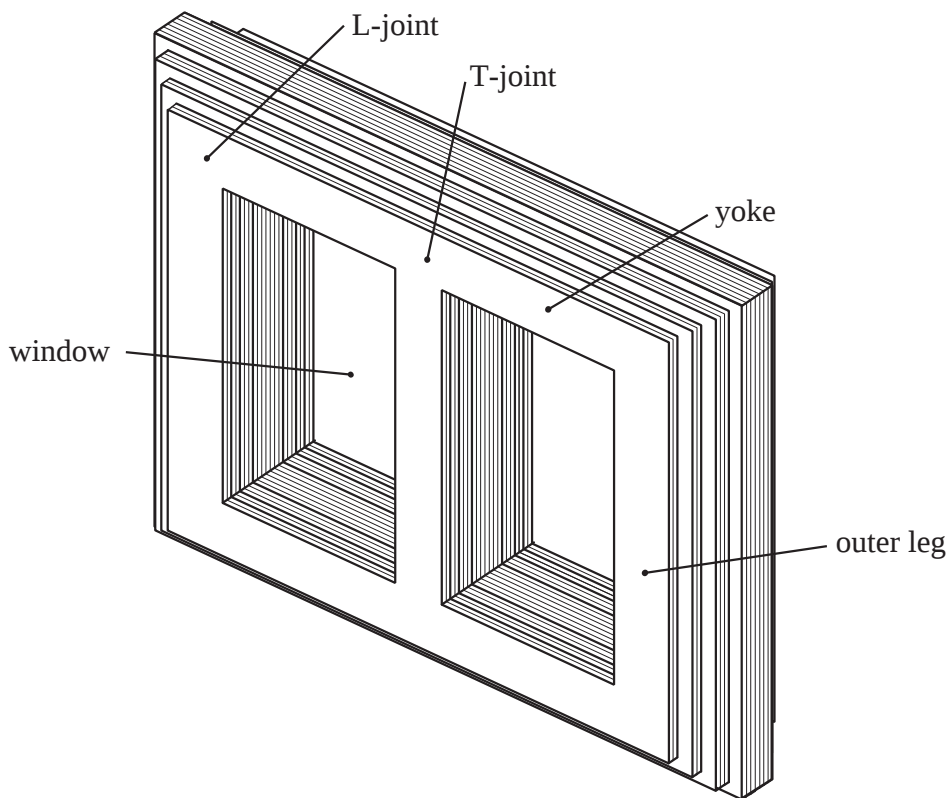
Poznamenejme, že tento nelineární problém může být převeden pomocí známé Kirchhoffovy transformace (viz [19])

$$\mathcal{K}(U) = \int_0^U \lambda(\xi) \, d\xi, \quad U \in \mathbb{R}^1,$$

na lineární problém

$$\begin{aligned} -\Delta z &= f && \text{v } \Omega, \\ z &= 0 && \text{na } \Gamma_1, \\ n^T \text{grad } z &= 0 && \text{na } \Gamma_2, \end{aligned}$$

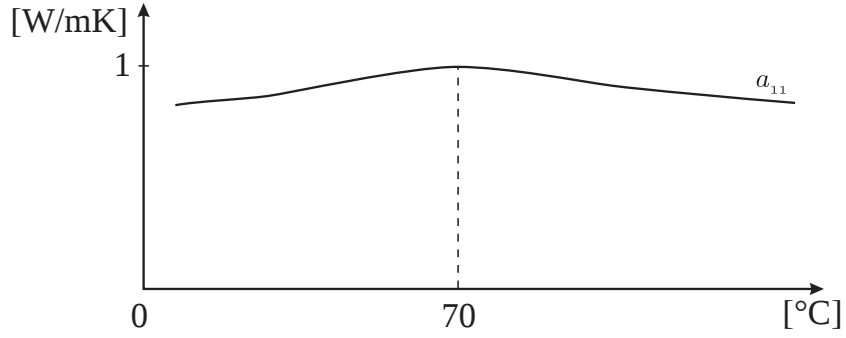
kde $z(x) = \mathcal{K}(u(x))$. Derivováním totiž formálně dostaneme, že $\text{grad } z = \lambda(u) \text{grad } u$. Navíc $\text{div grad } z = \Delta z$. Z (6.4) vidíme, že $\mathcal{K}$ je rostoucí funkce, tj. její inverze $\mathcal{K}^{-1}$ existuje a platí $u(x) = \mathcal{K}^{-1}(z(x))$.



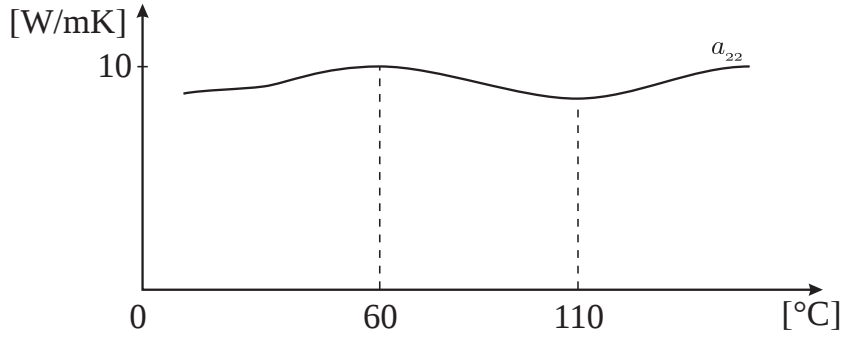
Obr. 6.1

Kirchhoffova transformace ale nemůže být použita v případě anizotropního nelineárního prostředí. Například při vyšetřování teplotních polí v magnetickém obvodu transformátoru (viz obr. 6.1) se nelineární tepelné vodivosti napříč a podél železných plechů podstatně liší. To je typický případ ortotropního materiálu. Příslušná matice $\mathcal{A}$ typu 3×3 tepelných vodivostí je diagonální a taková, že $a_{11} \neq a_{22} = a_{33}$. Teplotní závislosti diagonálních prvků jsou znázorněny na obr. 6.2 a 6.3. Vidíme, že typ nelinearity je v každém směru jiný (a navíc závisí na použitém železe pro konstrukci transformátorových plechů).

Protože Kirchhoffova transformace nemůže být použita, je třeba najít jiný způsob řešení tohoto problému. V poznámce 6.2 ukážeme, že rovnice (6.1)–(6.3) obecně nevedou na úlohu s monotónním operátorem (viz kap. 4). Také ukážeme, že teorii potenciálních operátorů z kapitoly 5 nelze použít.



Obr. 6.2



Obr. 6.3

Abychom stanovili slabou formulaci problému (6.1)–(6.3), budeme předpokládat, že $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ a $\alpha = \alpha(\cdot)$ jsou ohraničené a měřitelné funkce,

$$(6.5) \quad \text{ess sup}_{x, \xi, i, j} |a_{ij}(x, \xi)| \leq C, \quad \text{ess sup}_s |\alpha(s)| \leq C,$$

kde $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^1$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$ a $s \in \Gamma_2$. Nechť jsou prvky a_{ij} lipschitzovsky spojitě funkce vzhledem k poslední proměnné, tj. existuje konstanta $C_L > 0$ taková, že pro všechna $\zeta, \xi \in \mathbb{R}^1$ a skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$(6.6) \quad |a_{ij}(x, \zeta) - a_{ij}(x, \xi)| \leq C_L |\zeta - \xi|, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Navíc předpokládáme, že existuje $C_0 > 0$ tak, že pro skoro všechna $x \in \Omega$

$$(6.7) \quad C_0 \eta^T \eta \leq \eta^T \mathcal{A}(x, \xi) \eta \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^1 \forall \eta \in \mathbb{R}^d$$

a

$$0 \leq \alpha(s)$$

pro skoro všechna $s \in \Gamma_2$. Konečně předpokládejme, že $f \in L^2(\Omega)$, $\bar{u} \in H^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_2)$ a nechť

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ na } \Gamma_1\}.$$

Pro jednoduchost nebudeme nadále většinou explicitně vyznačovat možnou závislost $\mathcal{A}$ na x . Položme

$$(6.8) \quad a(y; w, v) = (\mathcal{A}(y) \text{grad } w, \text{grad } v)_{0, \Omega} + \langle \alpha w, v \rangle_{0, \Gamma_2}, \quad y, w, v \in H^1(\Omega),$$

$$(6.9) \quad F(v) = (f, v)_{0, \Omega} + \langle g, v \rangle_{0, \Gamma_2}, \quad v \in H^1(\Omega),$$

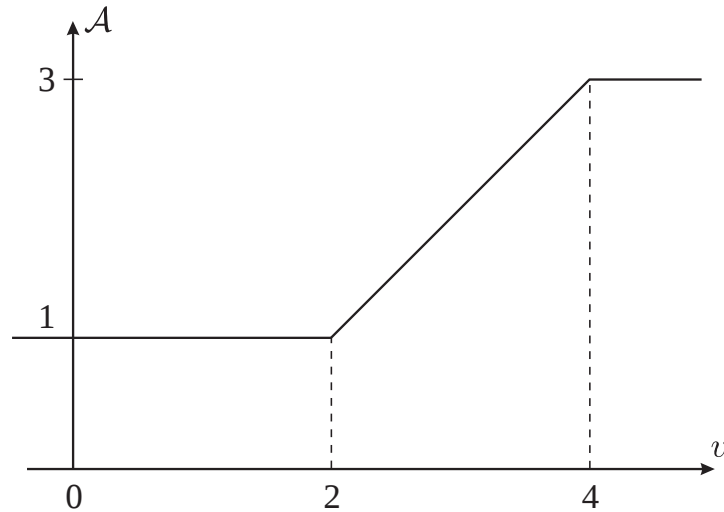
kde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{0, \Gamma_2}$ označuje běžný skalární součin v $L^2(\Gamma_2)$. Protože $\mathcal{A}$ a α jsou ohraničené, vidíme, že oba členy v (6.8) jsou konečné, tj. $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ je dobře definováno.

Definice 6.1. Funkce $u \in H^1(\Omega)$ se nazývá slabým řešením problému (6.1) – (6.3), jestliže $u - \bar{u} \in V$ a

$$a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Poznámka 6.2. Pro důkaz existence slabého řešení $u \in V$ nemůžeme použít hlavní větu o monotónních operátorech (viz větu 4.22), neboť vyšetřovaná úloha obecně nevede na monotónní operátor. Abychom toto ukázali, položíme například $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \emptyset$, $\alpha = 1/50$ a definujeme (neklesající funkci $\mathcal{A}$ – viz obr. 6.4)

$$\mathcal{A}(x, v) = \mathcal{A}(v) = \begin{cases} 1 & \text{pro } v \leq 2, \\ v - 1 & \text{pro } v \in (2, 4), \\ 3 & \text{pro } v \geq 4. \end{cases}$$



Obr. 6.4

Definujme dále nelineární operátor $\mathbb{A} : V \rightarrow V$ vztahem

$$(6.10) \quad \langle \mathbb{A}w, v \rangle = a(w; w, v), \quad v, w \in V,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je $H^1(\Omega)$ -skalární součin. Vidíme, že funkce $v(x) = 2x$ a $w(x) = x + 4$ porušují podmínku monotonie (4.3) pro operátor $\mathbb{A}$, protože

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}v - \mathbb{A}w, v - w \rangle &= a(v; v, v - w) - a(w; w, v - w) \\ &= \int_0^1 (\mathcal{A}(v)v' - \mathcal{A}(w)w')(v' - w') \, dx + \frac{1}{50} \int_{\Gamma_2} (v - w)^2 \, ds \\ &= \int_0^1 (1 \times 2 - 3 \times 1)(2 - 1) \, dx + \frac{1}{50} ((v(1) - w(1))^2 + (v(0) - w(0))^2) \\ &= -1 + \frac{1}{2} < 0, \end{aligned}$$

kde v' označuje derivaci vzhledem k x . Abychom ukázali, že problém (6.1)–(6.3) může vést na nemonotónní operátor také pro $d > 1$, stačí položit $\Omega = [(0, 1)]^d$, $a_{11}(v) = \mathcal{A}(v)$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $a_{ii} = 1$ pro $i = 2, \dots, d$, a uvažovat funkce $v(x_1, \dots, x_d) = v(x_1)$ a $w(x_1, \dots, x_d) = w(x_1)$ pro $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$, $\alpha(s) = \alpha_0$ pro dostatečně malá $\alpha_0 \in (0, 1)$ a opět $\Gamma_1 = \emptyset$.

Pokud by byl operátor $\mathbb{A}$ definovaný vztahem (6.10) potenciální (viz definici 5.10), pak by podle věty 5.12 byl příslušný funkcionál nekonvexní. Jak známo, minimalizační úlohy s nekonvexním funkcionálem se řeší velice obtížně. V následující poznámce ale ukážeme, že operátor příslušný vyšetřované nelineární úloze vedení tepla nemusí být ani potenciální.

Poznámka 6.3. Problém z definice 6.1 nelze převést na minimalizaci reálného funkcionálu, protože příslušný operátor $\mathbb{A}$ obecně není potenciální. Abychom to zjistili, stačí položit $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$, $\Gamma_1 = \{0\}$, $\alpha \equiv 0$,

$$\mathcal{A}(x, v) = \mathcal{A}(v) = v + 1 \quad \text{pro } v \in (0, 1)$$

a $\mathcal{A}(v)$ může být definováno libovolným způsobem mimo interval $(0, 1)$ tak, aby platily vztahy (6.6), (6.7) a ohraničenost $\mathcal{A}$. Podle [19], Lemma III.4.1, demispojité operátor $\mathbb{A}$ (viz definici 4.14) je potenciální právě tehdy, když

$$(6.11) \quad \int_0^1 \langle \mathbb{A}tv, v \rangle dt - \int_0^1 \langle \mathbb{A}tw, w \rangle dt = \int_0^1 \langle \mathbb{A}(w + t(v - w)), v - w \rangle dt$$

pro všechna $v, w \in V$.

Nechť tedy $w_k \rightarrow w$ ve V pro $k \rightarrow \infty$. Pak z ohraničenosti a lipschitzovské spojitosti $\mathcal{A}$ (viz (6.6)), Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti (2.10) a (2.31) dostaneme

$$\begin{aligned} |a(w_k; w_k, v) - a(w; w, v)| &\leq |a(w_k; w_k - w, v)| + |a(w_k; w, v) - a(w; w, v)| \\ &\leq C\|w_k - w\|_1\|v\|_1 + C_L\|w_k - w\|_0\|w'\|_0\|v'\|_{0,\infty} \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pro libovolné $v \in V \cap C^1([0, 1])$. Nyní z (6.10) a z hustoty $V = \overline{V \cap C^1([0, 1])}$ vidíme, že $\mathbb{A}w_k \rightarrow \mathbb{A}w$, což znamená, že $\mathbb{A}$ je demispojité.

Položíme-li $v(x) = x^2$ a $w(x) = x$, dojdeme k rovnostem

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \mathbb{A}tv, v \rangle dt &= \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{A}(tv)(tv)'v' dx dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + tx^2)(2tx)2x dx dt = \frac{14}{15}, \\ \int_0^1 \langle \mathbb{A}tw, w \rangle dt &= \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{A}(tw)(tw)'w' dx dt = \int_0^1 \int_0^1 (1 + tx)t dx dt = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \langle \mathbb{A}(w + t(v - w)), v - w \rangle dt &= \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{A}(w + t(v - w))(w + t(v - w))'(v - w)' dx dt = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x + t(x^2 - x) + 1)(1 + t(2x - 1))(2x - 1) dx dt = \frac{73}{180}, \end{aligned}$$

tj. (6.11) neplatí, a proto $\mathbb{A}$ není potenciální.

Jiný způsob je prověřit, že známé nutné podmínky symetrie z [42], str. 41, nejsou splněny. To, že pro operátor $\mathbb{A}$ neexistuje potenciál, znamená, že neexistuje funkcionál $J : V \rightarrow \mathbb{R}^1$, jehož Gâteauxův diferenciál splňuje vztah (viz definici 5.10)

$$\langle \mathbb{A}v, w \rangle = J'(v; w) \quad \forall v, w \in V.$$

6.2. Existence slabého a diskrétního řešení

V dalším budeme pro jednoduchost předpokládat, že

$$d \in \{2, 3\} \quad \text{a} \quad \Gamma_1 = \emptyset,$$

což je praktický případ z technické praxe (viz par. 6.5). Budeme hledat slabé řešení $u \in H^1(\Omega)$ takové, že (viz definici 6.1)

$$(6.12) \quad a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Abychom zaručili existenci takového u , budeme navíc předpokládat, že existuje konstanta $\alpha_0 > 0$ a neprázdná relativně otevřená podmnožina $\Gamma_3 \subset \Gamma_2 = \partial\Omega$ taková, že platí

$$\alpha(s) \geq \alpha_0$$

pro skoro všechna $s \in \Gamma_3$. Pak existuje konstanta $C_0 > 0$ tak, že

$$(6.13) \quad C_0 \|v\|_1^2 \leq a(y; v, v) \quad \forall y, v \in H^1(\Omega).$$

Tato nerovnost je přímým důsledkem (6.7), (6.8) a následující Friedrichsovy nerovnosti (srov. (2.32))

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 \leq C(\|\text{grad } v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Gamma_3}^2) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Poznámka 6.4. Pomocí (6.8), (6.9), ohraničenosti $\mathcal{A}$, α (viz (6.5)) a věty o stopách 2.8 není těžké se přesvědčit, že

$$(6.14) \quad |a(y; w, v)| \leq C\|w\|_1\|v\|_1 \quad \forall y, w, v \in H^1(\Omega),$$

$$(6.15) \quad |F(v)| \leq C\|v\|_1 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Dříve, než ukážeme, že problém (6.12) má řešení, uvedeme jednu důležitou větu.

Věta 6.5. *Nechť $V_h \subset C(\overline{\Omega})$ je neprázdný konečněrozměrný podprostor prostoru V . Pak*

(i) *existuje Galerkinova aproximace $u_h \in V_h$ tak, že*

$$(6.16) \quad a(u_h; u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

(ii) *jestliže je konstanta C_L z (6.6) dostatečně malá, pak existuje jediná Galerkinova aproximace u_h .*

Navíc u_h lze získat pomocí metody postupných aproximací (Kačanovova metoda) takto:

Nechť $y^0 \in V_h$ je libovolné. Pokud je $y^k \in V_h$ známo, pak $y^{k+1} \in V_h$ definujeme vztahem

$$(6.17) \quad a(y^k; y^{k+1}, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

a

$$\|u_h - y^k\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } k \rightarrow \infty.$$

D ů k a z . (i) Uvažujme zobrazení

$$S : V_h \rightarrow V_h$$

definované vztahem

$$(6.18) \quad a(y; Sy, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h.$$

Toto zobrazení je určeno jednoznačně, jak plyne z (6.13)–(6.15) a Laxova-Milgramova lemmatu 2.3.

Položíme-li $v = Sy$ v (6.18), můžeme pomocí (6.13) a (6.15) psát

$$C_0 \|Sy\|_1^2 \leq a(y; Sy, Sy) = F(Sy) \leq C \|Sy\|_1.$$

Tudíž

$$(6.19) \quad \|Sy\|_1 \leq C/C_0 \quad \forall y \in V_h.$$

Dále ukážeme, že zobrazení S je lipschitzovsky spojitý, tj. existuje konstanta $C_S > 0$ taková, že C_S je nezávislá na C_L a

$$(6.20) \quad \|Sy - Sz\|_1 \leq C_L C_S \|y - z\|_1 \quad \forall y, z \in V_h.$$

Nechť tedy $y, z \in V_h$ jsou libovolné a necht' $v = Sy - Sz \in V_h$. Ze vztahů (6.13), (6.18), (6.19), (6.6) a ekvivalence všech norem ve V_h dostaneme

$$\begin{aligned} C_0 \|v\|_1^2 &\leq a(y; v, v) = a(y; Sy, v) - a(y; Sz, v) = F(v) - a(y; Sz, v) \\ &= a(z; Sz, v) - a(y; Sz, v) = ((\mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(y)) \text{grad } (Sz), \text{grad } v)_0 \\ &\leq C_L d^2 \|z - y\|_{0,\infty} \|Sz\|_1 \|v\|_1 \leq C_L C \|z - y\|_1 \|v\|_1, \end{aligned}$$

kde C je nezávislá na C_L , tj. (6.20) platí.

Existence pevného bodu $y = Sy$ nyní plyne z (6.19), spojitosti S a Brouwerovy věty 4.19 o pevném bodě. Položíme-li $u_h = y$, získáme Galerkinovu aproximaci splňující (6.16).

(ii) Jestliže $C_L C_S < 1$, zobrazení S je podle (6.20) kontraktivní a známá iterační procedura

$$y^0 \in V_h, \quad y^{k+1} = Sy^k$$

vede k jedinému pevnému bodu y , protože

$$\|y^k - y\|_1 \leq (1 - C_L C_S)^{-1} (C_L C_S)^k \|y^0 - Sy^0\|_1$$

(viz např. [43], par. 11.7). Tedy (ii) platí. $\square$

Ve větě 6.6 dokážeme existenci řešení u problému (6.12) jako slabou limitu Galerkinových aproximací u_h za následujícího předpokladu:

Nechť $\{V_h\}_{h \rightarrow 0}$ je systém konečněrozměrných podprostorů $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ takových, že

$$(6.21) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \exists \{v_h\}_{h \rightarrow 0} : v_h \in V_h, \quad \|v - v_h\|_1 \rightarrow 0 \text{ pro } h \rightarrow 0.$$

Tato podmínka je splněna pro řadu prostorů konečných prvků (viz např. [8]).

Věta 6.6. *Nechť (6.21) platí a nechť $\{u_h\}_{h \rightarrow 0}$ je posloupnost Galerkinových aproximací splňujících (6.16). Pak existuje podposloupnost $\{u_{\hat{h}}\} \subset \{u_h\}$ a prvek $u \in H^1(\Omega)$ tak, že*

$$(6.22) \quad u_{\hat{h}} \rightharpoonup u \quad (\text{slabě}) \text{ v } H^1(\Omega) \quad \text{pro } \hat{h} \rightarrow 0$$

a u je řešením problému (6.12). Navíc každý hromadný bod posloupnosti $\{u_h\}$ je řešením (6.12).

D ů k a z . Nejprve dokážeme ohraničenost $\{u_h\}$ v $H^1(\Omega)$. Pomocí (6.13) a (6.15) můžeme psát

$$(6.23) \quad C_0 \|u_h\|_1^2 \leq a(u_h; u_h, u_h) = F(u_h) \leq C \|u_h\|_1.$$

Tudíž

$$(6.24) \quad \|u_h\|_1 \leq \frac{C}{C_0}.$$

Podle Eberleinovy-Schmulyanovy věty (viz [67], kap. V) lze z každé omezené posloupnosti v reflexivním Banachově prostoru vybrat slabě konvergentní podposloupnost. Tedy existuje prvek $u \in H^1(\Omega)$ a podposloupnost $\{u_{\hat{h}}\} \subset \{u_h\}$ tak, že (6.22) platí. Pro jednoduchost budeme nadále psát h místo $\hat{h}$.

Ukážeme, že u je řešením (6.12). Protože $u_h \in H^1(\Omega)$, slabá limita u také patří do $H^1(\Omega)$. Zbývá tedy dokázat rovnost (6.12).

Nechť $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ je libovolné leč pevné. Potom z (6.6) dostáváme

$$(6.25) \quad \begin{aligned} |a(u; u_h, v) - a(u_h; u_h, v)| &\leq \sum_{i,j} \int_{\Omega} |a_{ij}(u) - a_{ij}(u_h)| |\partial_i u_h| |\partial_j v| \, dx \\ &\leq C_L C(v) \|u - u_h\|_0 \|u_h\|_1. \end{aligned}$$

Dále necht' $\{v_h\}_{h \rightarrow 0}$ je posloupnost splňující (6.21). Potom z (6.16), (6.25), (6.14), (6.15), (6.22), (6.24), z Rellichovy věty 2.9 a z (6.21) dostaneme

$$\begin{aligned} |a(u; u, v) - F(v)| &\leq |a(u; u - u_h, v)| + |a(u; u_h, v) - a(u_h; u_h, v)| + |a(u_h; u_h, v - v_h)| + |F(v_h - v)| \\ &\leq |a(u; u - u_h, v)| + C_1 \|u - u_h\|_0 \|u_h\|_1 + C_2 \|u_h\|_1 \|v - v_h\|_1 + C_3 \|v - v_h\|_1 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

jakmile $h \rightarrow 0$. Tedy

$$a(u; u, v) = F(v) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Z nerovnosti

$$|a(u; u, w) - F(w)| \leq |a(u; u, w) - a(u; u, v)| + |F(v) - F(w)| \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

z hustoty $C^\infty(\overline{\Omega})$ v $H^1(\Omega)$, z (6.14) a (6.15) zjistíme, že u je řešení problému (6.12). $\square$

Následující důsledek nám umožňuje odhadnout normu $\|u\|_1$ pomocí „dat“. Jednoznačnost řešení tak dostaneme pro nulová data.

Důsledek 6.7. *Existuje konstanta $C > 0$ (nezávislá na datech f, g) taková, že*

$$\|u\|_1 \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega}).$$

Důkaz. Z (6.13), (6.12), (6.9) a věty o stopách 2.8 platí

$$C_0 \|u\|_1^2 \leq a(u; u, u) = (f, u)_{0,\Omega} + \langle g, u \rangle_{0,\partial\Omega} \leq C(\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\partial\Omega}) \|u\|_1. \quad \square$$

6.3. Jednoznačnost a nejednoznačnost slabého řešení

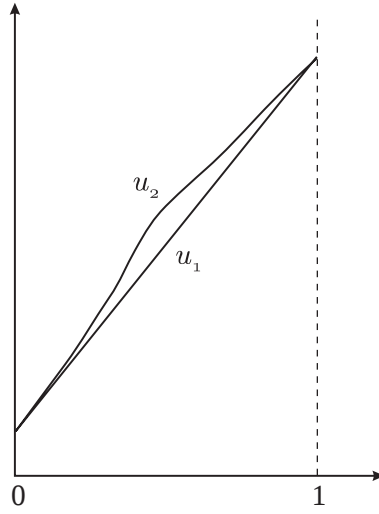
Existuje řada příkladů na nejednoznačnost řešení (viz např. [20], str. 209), kdy eliptická rovnice není v divergentním tvaru (6.1). Nejednoznačnost řešení našeho problému (6.1)–(6.3) v divergentním tvaru můžeme ale dostat, jestliže podmínka (6.6) není splněna. Abychom toto ukázali, uvedeme jednorozměrný příklad pocházející od J. Malého. Necht' $d = 1$, $\Omega = (0, 1)$ a necht' u_1, u_2 jsou dvě pevné hladké reálné funkce takové, že $u_1 < u_2$ na $(0, 1)$, $u_1(0) = u_2(0)$, $u_1'(0) = u_2'(0)$, $u_1(1) = u_2(1)$, $u_1'(1) = u_2'(1)$, $1 \leq u_1' \leq 3$ a $1 \leq u_2' \leq 3$ (viz obr. 6.5). Definujme reálnou funkci $\mathcal{A}$ na grafech u_1 a u_2 takto:

$$\mathcal{A}(x, \xi) = \frac{1}{u_i'(x)} \quad \text{pro } x \in [0, 1], \quad \xi = u_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Pak pomocí Tietzeovy věty o rozšíření (viz např. [50], str. 422) existuje spojitě rozšíření, které pro jednoduchost označme opět $\mathcal{A}$, takové, že $\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ a platí vztahy (6.5) a (6.7). Vidíme, že

$$-(\mathcal{A}(x, u_i)u_i')' = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2,$$

tj. u_1 a u_2 jsou řešení (6.1) s nehomogenními okrajovými podmínkami a $f = 0$. Avšak v tomto případě se lze přesvědčit, že funkce $\mathcal{A}$ není lipschitzovsky spojitá (vzhledem ke druhé proměnné) v těch bodech, kde u_1 a u_2 bifurkují. Podmínka (6.6) je proto podstatná.



Obr. 6.5

Jednoznačnost slabého řešení pro smíšené nelineární okrajové podmínky je dokázána v [27]. V tomto paragrafu opět pro jednoduchost předpokládáme, že $\Gamma_1 = \emptyset$, $d \in \{1, 2, \dots\}$ a že existuje konstanta $\alpha_0 > 0$ a neprázdná relativně otevřená podmnožina $\Gamma_3 \subset \Gamma_2 = \partial\Omega$ taková, že

$$(6.26) \quad \alpha \geq \alpha_0 \quad \text{na } \Gamma_3.$$

Pod rovností, resp. nerovností, budeme v dalším rozumět rovnost, resp. nerovnost, až na množinu míry nula.

Věta 6.8 (srovnávací princip). *Necht' (6.5) – (6.7) a (6.26) platí a necht' $u_i \in H^1(\Omega)$ je slabé řešení problému (6.12) odpovídající $f_i \in L^2(\Omega)$ a $g_i \in L^2(\partial\Omega)$ pro $i = 1, 2$. Předpokládejme, že*

$$f_1 \geq f_2 \quad \text{v } \Omega$$

a

$$g_1 \geq g_2 \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Pak $u_1 \geq u_2$ v Ω . Navíc problém (6.12) má nejvýše jedno řešení.

D ů k a z . Uvažujme následující množinu

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid u_1(x) < u_2(x)\}$$

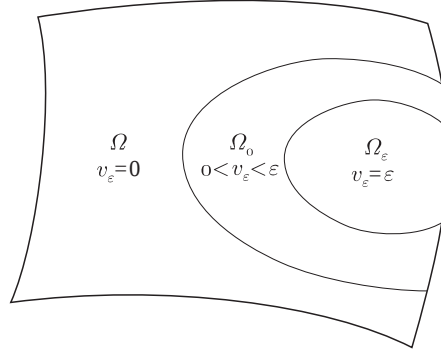
a předpokládejme, že

$$(6.27) \quad \text{meas } \Omega_0 > 0.$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ definujeme (viz obr. 6.6)

$$(6.28) \quad \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega_0 \mid u_2(x) - u_1(x) > \varepsilon\},$$

$$(6.29) \quad v_\varepsilon = \begin{cases} \min(\varepsilon, u_2 - u_1) & \text{v } \Omega_0, \\ 0 & \text{v } \mathbb{R}^d \setminus \Omega_0. \end{cases}$$



Obr. 6.6

To znamená, že $v_\varepsilon = \varepsilon$ v Ω_ε , $0 < v_\varepsilon < \varepsilon$ v $\Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon$ a $v_\varepsilon = 0$ v $\Omega \setminus \Omega_0$.

Nejprve ukážeme, že v_ε lze použít v (6.12) jako testovací funkci. Necht' $V = H^1(\Omega)$. Protože $u_2 - u_1 \in V$, kladná část $(u_2 - u_1)^+$ rovněž leží v V . To platí z toho důvodu, že $v \mapsto v^+$ je spojitě zobrazení z $H^1(\Omega)$ do $H^1(\Omega)$ – viz např. [22], str. 29. Jestliže tedy $v \in V$, pak $|v| = v^+ + v^-$ také patří do V pro $v \in V$. A tak rovnost $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ implikuje, že

$$(6.30) \quad v_\varepsilon = \min(\varepsilon, (u_2 - u_1)^+) \in V.$$

Tudíž v_ε může být použita jako testovací funkce ve slabé formulaci (6.12),

$$(6.31) \quad (\mathcal{A}(u_i) \text{grad } u_i, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega} + \langle \alpha u_i, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega} = (f_i, v_\varepsilon)_{0, \Omega} + \langle g_i, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega}, \quad i = 1, 2.$$

Protože $v_\varepsilon \geq 0$ a $\alpha \geq 0$, platí

$$(6.32) \quad \alpha(u_1 - u_2)v_\varepsilon \leq 0 \quad \text{na } \partial \Omega.$$

Z (6.7), (6.31) a (6.32) vyplývá

$$(6.33) \quad \begin{aligned} C_0 \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 &\leq (\mathcal{A}(u_1) \text{grad } v_\varepsilon, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega} \\ &= (\mathcal{A}(u_1) \text{grad } (u_2 - u_1), \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\ &= (\mathcal{A}(u_1) \text{grad } u_2 - \mathcal{A}(u_1) \text{grad } u_1, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega} \\ &= (\mathcal{A}(u_1) \text{grad } u_2 - \mathcal{A}(u_2) \text{grad } u_2, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega} \\ &\quad + \langle \alpha(u_1 - u_2), v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega} + (f_2 - f_1, v_\varepsilon)_{0, \Omega} + \langle g_2 - g_1, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega} \\ &\leq ((\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)) \text{grad } u_2, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega}. \end{aligned}$$

Poslední skalární součin může být dále odhadnut pomocí (6.28), (6.29), Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

a (6.6) následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
(6.34) \quad & ((\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)) \text{grad } u_2, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\
& \leq \|(\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)) \text{grad } u_2\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\
& \leq d^2 \max_{i,j} \|a_{ij}(u_1) - a_{ij}(u_2)\| \left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\
& \leq C_L d^2 \max_j \|u_1 - u_2\| \left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\
& \leq \varepsilon C_L d^2 \|\text{grad } u_2\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Kombinací (6.33) a (6.34) dostaneme

$$(6.35) \quad \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega} \leq \varepsilon C \|\text{grad } u_2\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon}.$$

Podle (6.29) a (6.26) je

$$0 \leq v_\varepsilon \leq (u_2 - u_1)^+ = u_2 - u_1 \leq \frac{1}{\alpha_0} (\alpha u_2 - \alpha u_1) \quad \text{na } \Gamma_3 \cap \overline{\Omega}_0,$$

a tedy (protože $v_\varepsilon = 0$ na $\Gamma_3 \setminus \overline{\Omega}_0$) platí

$$(6.36) \quad v_\varepsilon^2 \leq \frac{1}{\alpha_0} (\alpha u_2 - \alpha u_1) v_\varepsilon \quad \text{na } \Gamma_3.$$

Navíc z (6.33) je také patrné, že

$$-\langle \alpha u_1 - \alpha u_2, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega} + C_0 \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 \leq ((\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)) \text{grad } u_2, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega}.$$

Tudíž Friedrichsova nerovnost (viz věta 2.13), (6.36), nerovnost

$$\langle \alpha u_2 - \alpha u_1, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega \setminus \Gamma_3} \geq 0,$$

(6.34) a (6.35) implikují, že

$$\begin{aligned}
\|v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2 & \leq C_1 (\|v_\varepsilon\|_{0, \Gamma_3}^2 + \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2) \\
& \leq C_2 (\langle \alpha u_2 - \alpha u_1, v_\varepsilon \rangle_{0, \Gamma_3} + \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2) \\
& \leq C_3 (\langle \alpha u_2 - \alpha u_1, v_\varepsilon \rangle_{0, \partial \Omega} + C_0 \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega}^2) \\
& \leq C_3 ((\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)) \text{grad } u_2, \text{grad } v_\varepsilon)_{0, \Omega} \\
& \leq \varepsilon C_4 \|\text{grad } u_2\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \|\text{grad } v_\varepsilon\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon} \\
& \leq \varepsilon^2 C_5 \|\text{grad } u_2\|_{0, \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon}^2.
\end{aligned}$$

Dále ukážeme, že

$$\text{meas } \Omega_\varepsilon \rightarrow \text{meas } \Omega_0 \quad \text{pro } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Protože zřejmě platí

$$\text{meas } \Omega_0 = \text{meas } \Omega_\varepsilon + \text{meas } (\Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon),$$

stačí ukázat, že

$$\text{meas } (\Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{pro } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Předpokládejme, že tomu tak není. Pak existuje neprázdná (pevná) množina $\tilde{\Omega}$ tak, že

$$\tilde{\Omega} \subset \Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Je-li $x \in \tilde{\Omega}$, potom $u_2(x) - u_1(x) > 0$, protože $\tilde{\Omega} \subset \Omega_0$. Avšak

$$u_2(x) - u_1(x) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

tj. $u_2(x) - u_1(x) = 0$, což je spor. Tedy $\tilde{\Omega} = \emptyset$.

Odtud, z (6.29), ze skutečnosti, že u_2 je pevné (jediné), a z inkluze $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_0$ vyplývá, že

$$\text{meas } \Omega_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon^2 dx \leq \varepsilon^{-2} \|v_\varepsilon\|_{0,\Omega}^2 \leq C_5 \|\text{grad } u_2\|_{0,\Omega_0 \setminus \Omega_\varepsilon}^2 \rightarrow 0 \quad \text{pro } \varepsilon \rightarrow 0,$$

kde $C_5 > 0$ je konstanta nezávislá na ε . Toto je však v rozporu se vztahy (6.27) a (6.28), jelikož platí $\text{meas } \Omega_\varepsilon \rightarrow \text{meas } \Omega_0$. Čili $\text{meas } \Omega_0 = 0$ a $u_1 \geq u_2$ v Ω .

Jednoznačnost slabého řešení dostaneme snadno z již dokázaného srovnávacího principu následující úvahou. Jestliže $f_1 = f_2$ a $g_1 = g_2$, pak zřejmě $f_1 \geq f_2$, $g_1 \geq g_2$, ale i $f_2 \geq f_1$ a $g_2 \geq g_1$, a tedy $u_1 \geq u_2$ a zároveň $u_2 \geq u_1$ v Ω , odkud plyne jednoznačnost slabého řešení. $\square$

6.4. Konvergence Galerkinových aproximací

Z (6.22) a kompaktnosti operátoru vnoření $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ lze snadno dokázat konvergenci Galerkinových aproximací v normě $\|\cdot\|_0$. Abychom ještě dokázali (silnou) konvergenci v normě $\|\cdot\|_1$, budeme navíc požadovat, aby

$$(6.37) \quad V_h \subset W_4^1(\Omega), \quad \|v_h\|_{1,4} \leq C(v) \quad \forall h,$$

kde v_h splňuje (6.21) a $C(v)$ je konstanta nezávislá na h .

Poznámka 6.9. Pomocí standardní interpolační teorie můžeme snadno ověřit (6.21) a (6.37) pro řadu systémů prostorů konečných prvků (viz např. [8]). Funkci v_h lze definovat například jako V_h -interpolaci v . Pak dostaneme

$$\|v_h\|_{1,4} \leq \|v - v_h\|_{1,4} + \|v\|_{1,4} \leq C(v).$$

Věta 6.10. *Nechť předpoklady věty 6.6 jsou splněny a necht' (6.37) platí. Pak je konvergence (6.22) silná, tj.*

$$(6.38) \quad \|u - u_h\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } \hat{h} \rightarrow 0.$$

Jestliže navíc existuje právě jedno řešení problému (6.12), pak (6.38) platí pro celou posloupnost $\{u_h\}$.

D ů k a z . Uvažujme posloupnost $\{u_{\hat{h}}\}$ z (6.22). Pro jednoduchost opět budeme psát jen h místo $\hat{h}$.

Protože $u \in H^1(\Omega)$, existuje posloupnost $\{w^m\}_{m=1}^\infty \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tak, že

$$\|u - w^m\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } m \rightarrow \infty.$$

Podle předpokladů (6.21) a (6.37) existují posloupnosti $\{w_h^m\}_{h \rightarrow 0}$, $m = 1, 2, \dots$, tak, že $w_h^m \in V_h$,

$$(6.39) \quad \|w^m - w_h^m\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{pro } h \rightarrow 0,$$

$$(6.40) \quad \|w_h^m\|_{1,4} \leq C(w^m) \quad \forall h \forall m.$$

Pro stručnost položíme

$$v_h^m = u_h - w_h^m \in V_h.$$

Pomocí (6.13) a definic (6.12), (6.16) můžeme psát

$$\begin{aligned} C_0 \|v_h^m\|_1^2 &\leq a(u_h; v_h^m, v_h^m) = a(u_h; u_h, v_h^m) - a(u_h; w_h^m, v_h^m) \\ &= a(u; u, v_h^m) - a(u_h; w_h^m, v_h^m) \\ &= a(u; u - w_h^m, v_h^m) + [a(u; w_h^m, v_h^m) - a(u_h; w_h^m, v_h^m)] \equiv E_1 + E_2. \end{aligned}$$

Z (6.14), Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

$$\|PQ\|_0^2 = \int_\Omega P^2 Q^2 dx \leq \sqrt{\int_\Omega P^4 dx} \sqrt{\int_\Omega Q^4 dx} = \|P\|_{0,4}^2 \|Q\|_{0,4}^2,$$

nerovnosti (6.40), lipschitzovské spojitosti a ohraničenosti $\mathcal{A}$ plyne, že

$$\begin{aligned} |E_1| &\leq C \|u - w_h^m\|_1 \|v_h^m\|_1, \\ |E_2| &\leq |((\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(u_h)) \text{grad } w_h^m, \text{grad } v_h^m)_0| \\ &\leq \|(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(u_h)) \text{grad } w_h^m\|_0 \|\text{grad } v_h^m\|_0 \\ &\leq d^2 \max_{ij} \|a_{ij}(u) - a_{ij}(u_h)\|_{0,4} \|\partial_j w_h^m\|_{0,4} \|v_h^m\|_1 \\ &\leq C \|u - u_h\|_{0,4} \|w_h^m\|_{1,4} \|v_h^m\|_1. \end{aligned}$$

Kombinací předchozích odhadů máme

$$C'_0 \|v_h^m\|_1 \leq \|u - w_h^m\|_1 + \|u - u_h\|_{0,4} \|w_h^m\|_{1,4},$$

kde $C'_0 > 0$. Odtud a z (6.40) dostaneme

$$C'_0 \|v_h^m\|_1 \leq \|u - w^m\|_1 + \|w^m - w_h^m\|_1 + C(w^m) \|u - u_h\|_{0,4}.$$

Pomocí vztahů (6.39), (6.22) a kompaktnosti operátoru vnoření $H^1(\Omega) \rightarrow L^4(\Omega)$ pro $d \in \{2, 3\}$ (tj. $\|v\|_{0,4} \leq C\|v\|_{1,2}$ – viz [41], str. 84, 86) zjistíme, že

$$(6.41) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \|v_h^m\|_1 \leq C\|u - w^m\|_1 \quad \forall m \in \{1, 2, \dots\},$$

kde $C = 2/C'_0$ je nezávislá na m . Protože $w_h^m - u_h = -v_h^m$, můžeme psát

$$\|u - u_h\|_1 \leq \|u - w^m\|_1 + \|w^m - w_h^m\|_1 + \|v_h^m\|_1.$$

Přechodem k $\limsup$ pro $h \rightarrow 0$ dostaneme pomocí (6.41) a (6.39), že

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_1 \leq (1 + C)\|u - w^m\|_1 \quad \forall m.$$

Silnou konvergenci (6.39) získáme limitním přechodem pro $m \rightarrow \infty$.

Pokud je slabé řešení jediné, pak je podle věty 6.6 každý hromadný bod posloupnosti $\{u_h\}$ totožný se slabým řešením. Tudíž celá posloupnost konverguje k u v $H^1(\Omega)$. $\square$

Poznámka 6.11. Jednoznačnost u_h řešení úlohy (6.16) dostaneme jen za poměrně silných předpokladů (viz větu 6.5). Na druhé straně jednoznačnost slabého řešení u plyne z relativně slabých předpokladů (viz větu 6.8). Jednoznačnost u_h nelze bohužel dokázat podobným způsobem jako jednoznačnost u , protože testovací funkce (srov. (6.30))

$$v_{\varepsilon h} = \min(\varepsilon, (u_{2h} - u_{1h})^+)$$

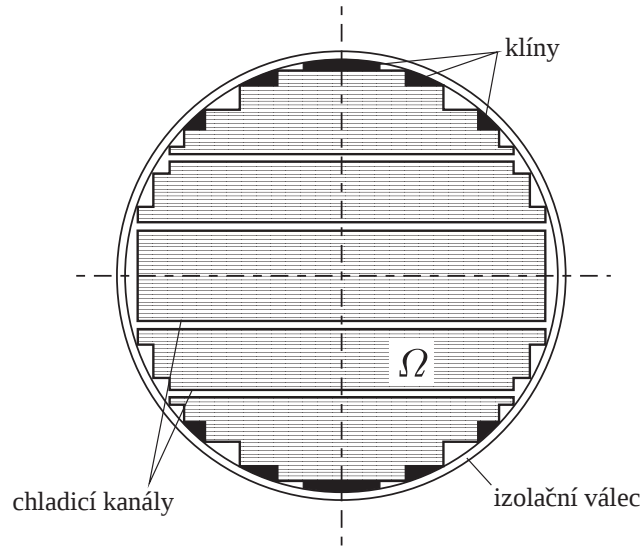
nepatří obecně do V_h . I když nemáme obecnou větu pro jednoznačnost Galekinových aproximací (je to zatím otevřený problém), vidíme, že u_h musí být blízko u v normě H^1 pro malá h v důsledku konvergence (6.38).

6.5. Příklad aplikace

Magnetický obvod (jádro) velkých olejem chlazených transformátorů (viz obr. 6.1) se skládá z několika pravoúhlých polyedrických oblastí, které jsou vzájemně odděleny chladicími kanály. Ty lze lépe vidět na obr. 6.7, který ukazuje průřez vnitřním sloupkem transformátoru.

Je vhodné počítat rozložení teploty v každé oblasti samostatně. Pro jednoduchost řešíme jen dvojrozměrný případ. Díky symetrii se můžeme zabývat jen pravou dolní čtvrtinou, jež se skládá ze třech polygonálních oblastí (z technologických důvodů hranice vyšetřovaných oblastí nejsou zakřivené).

Uvažujme kupříkladu střední oblast, kterou označíme symbolem Ω . Na levé části hranice $\partial\Omega = \Gamma_2$ předepíšeme homogenní Neumannovy okrajové podmínky symetrie (tj. $\alpha = 0$ v (6.3)) a nechť $\alpha = 100 \text{ [Wm}^{-1}\text{K}^{-1}]$ je hodnota koeficientu přestupu (přenosu) tepla na zbývající části hranice. Nechť $g = \alpha u_o$ (srov. (6.3)), kde $u_o = 55 \text{ [}^\circ\text{C}]$ je teplota chladicího oleje. Předpokládejme dále pro jednoduchost, že hustota tepelných zdrojů $f = 10\,000 \text{ [Wm}^{-2}]$ je konstantní v celé oblasti Ω (tepelné zdroje vznikají



Obr. 6.7

v důsledku střídavého elektromagnetického pole). Konečně nechť matice $\mathcal{A}$ tepelných vodivostí (viz (6.1) a (6.3)) je diagonální a nezávislá na $x \in \Omega$. Na obrázcích 6.2 a 6.3 vidíme teplotní závislost koeficientů tepelných vodivostí $a_{11}(u)$ a $a_{22}(u)$ napříč a podél transformátorových plechů. Definiční obor těchto funkcí může být rozšířen na $\mathbb{R}^1$ tak, že (6.5)–(6.7) stále platí.

Prostor V_h v (6.16) generujeme pomocí bilineárních konečných prvků. Použijeme Kačanovovu metodu (6.17) k aproximaci u_h . Pro konstantní počáteční teplotu 90 $^{\circ}\text{C}$ je odpovídající teplotní pole uvedeno v [33]. Diskretizační parametr volen tak, že zvýšení dimenze prostoru V_h již nezpůsobí žádné podstatné kvalitativní změny diskrétního řešení. Po pěti iteracích Kačanovovy metody byl získán „numerický pevný bod“ a maximální teplota 133 $^{\circ}\text{C}$ v oblasti Ω (po první iteraci byla maximální teplota jen 128 $^{\circ}\text{C}$).

Poznamenejme, že podrobná znalost rozložení teploty je důležitá, abychom se vyhnuli lokálnímu přehřátí. Jakmile totiž teplota přesáhne předepsané hodnoty dané normou, chladicí olej začne vřít a ztratí dobré izolační vlastnosti. To pak obvykle způsobí elektrický zkrat a destrukci celého transformátoru.

Poznámka 6.12. Nechť Γ je část hranice $\partial\Omega$, která je chlazená olejem. Položíme-li $v = 1$, pak z (6.8), definice 6.1 a (6.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \alpha u \, ds &= \int_{\partial\Omega} \alpha u \, ds = a(u; u, 1) = F(1) = (f, 1)_{0,\Omega} + \langle g, 1 \rangle_{0,\partial\Omega} \\ &= \int_{\Omega} f \, dx + \int_{\Gamma} \alpha u_o \, ds. \end{aligned}$$

Odtud je patrné, že střední nárůst teploty ϑ_{Γ} na Γ vůbec nezávisí na typu nelinearity koeficientů tepelné vodivosti,

$$\vartheta_{\Gamma} \equiv \frac{1}{\text{meas}_{d-1}\Gamma} \int_{\Gamma} (u - u_o) \, ds = \frac{1}{\alpha|_{\Gamma} \text{meas}_{d-1}\Gamma} \int_{\Omega} f \, dx,$$

je-li $\alpha|_{\Gamma}$ konstantní.

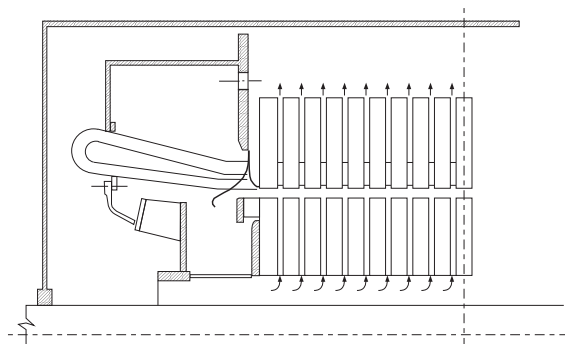
Na závěr ještě poznamenejme, že nestačí počítat jen teplotu na povrchu magnetického obvodu, protože chladicí olej může pronikat nepatrnými mezerami mezi plechy dovnitř.

7. NESTACIONÁRNÍ VEDENÍ TEPLA VE STATORU TOČIVÝCH STROJŮ

7.1. Klasická a slabá formulace

V této kapitole popíšeme metodu výpočtu trojrozměrného nestacionárního vedení tepla ve statoru asynchronních (indukčních) a synchronních točivých strojů. Stator elektromotorů má dosti komplikovaný geometrický tvar. Skládá se navíc z rozmanitých izotropních a anizotropních materiálů, jejichž tepelné vodivosti se značně liší, např. 332.8 [W/mK] pro měděné vodiče a 0.2 [W/mK] pro jejich izolaci. To způsobuje obrovské skoky v koeficientech příslušné rovnice vedení tepla a činí tak potíže při praktickém numerickém výpočtu teplotního pole.

Stator velkých rotačních strojů je obvykle dělen radiálními ventilačními kanály (viz šipky na obr. 7.1) na několik tzv. paketů. Obr. 7.1 ukazuje stator z bočního pohledu.



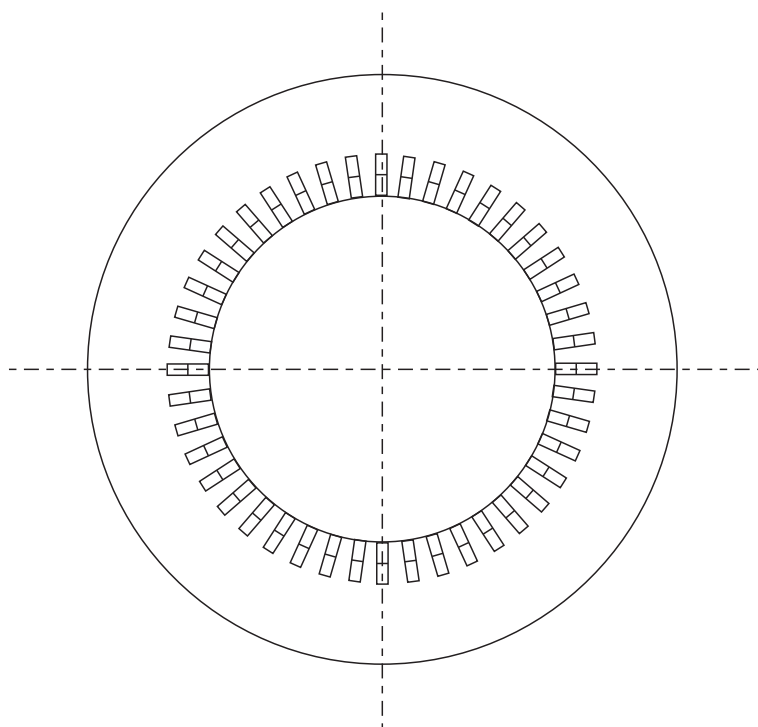
Obr. 7.1

Průřez takovým paketem rovinou kolmou na osu rotace rotoru je znázorněn na obr. 7.2.

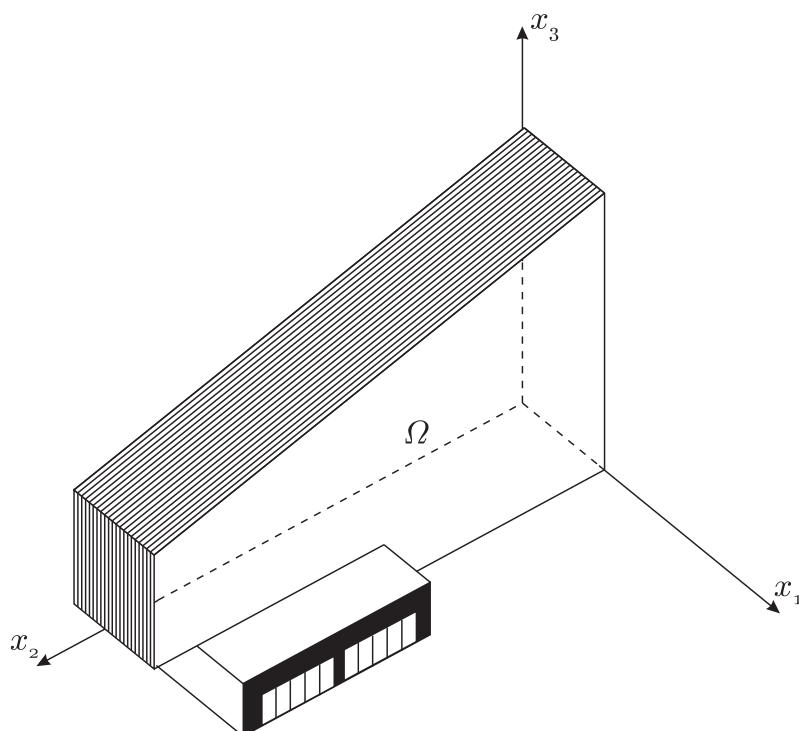
V důsledku „symetrie“ se při našich úvahách můžeme omezit jen na menší část paketu (viz obr. 7.3). Označme tuto oblast symbolem Ω . Rovina x_2x_3 z obr. 7.3 je tou rovinou symetrie paketu, jež je kolmá na osu rotace rotoru. S ní je rovnoběžná rovina symetrie chladicího kanálu, kterou prochází 2×5 měděných (či hliníkových) vodičů obalených izolací. Rovina x_1x_2 je tou rovinou symetrie paketu a též vodičů, která prochází osou rotace. Konečně poslední rovina symetrie procházející osou rotace odpovídá horní části oblasti Ω z obr. 7.3, kde zároveň vidíme průřez železnými transformátorovými plechy, z nichž je paket sestaven.

Nestacionární vedení tepla v oblasti Ω budeme popisovat parciální diferenciální rovnicí parabolického typu s počátečními a okrajovými podmínkami. Rovnice vedení tepla je dána (viz (1.10))

$$(7.1) \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A} \operatorname{grad} u) = f \quad \text{v } \Omega \times I,$$



Obr. 7.2



Obr. 7.3

kde $t \in I = (0, T)$ je časová proměnná, $T > 0$, $\rho = \rho(x) > 0$ je hustota, $c = c(x) > 0$ specifická tepelná kapacita, $u = u(x, t)$ je teplota, $\mathcal{A} = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^d$ je symetrická a stejnoměrně pozitivně definitní matice tepelných vodivostí a $f = f(x, t)$ je hustota objemových tepelných zdrojů.

Na hranici $\partial\Omega$ budeme uvažovat Newtonovy okrajové podmínky, které charakterizují přestup tepla z oblasti Ω do svého okolí,

$$(7.2) \quad \alpha u + n^T \mathcal{A} \text{grad } u = g \quad \text{na } \partial\Omega \times I.$$

Zde $\alpha = \alpha(s) \geq 0$ ($s \in \partial\Omega$) je koeficient přestupu tepla, n je vnější jednotková normála k hranici oblasti Ω , kogradient $\mathcal{A} \text{grad } u$ představuje tepelný tok, $n^T \mathcal{A} \text{grad } u$ se nazývá normálová složka tepelného toku a $g = g(s, t)$ je hustota povrchových tepelných zdrojů (vznikajících např. v důsledku skin efektu). Koeficient α je roven nule na těch částech hranice $\partial\Omega$, které odpovídají nějaké rovině symetrie. Na ostatních částech je kladný.

Dále budeme uvažovat počáteční podmínku

$$(7.3) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega,$$

kde u^0 odpovídá rozložení teploty v Ω v čase $t = 0$.

Abychom uvedli slabou formulaci problému (7.1)–(7.3), budeme v dalším předpokládat, že $c \in L^\infty(\Omega)$, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $c\rho \geq C > 0$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, d$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$, $u^0 \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{I}, L^2(\Omega))$ a $g \in C(\overline{I}, L^2(\partial\Omega))$, kde symbol $C(\overline{I}, L^2(\cdot))$ označuje prostor spojitých zobrazení z $\overline{I}$ do $L^2(\cdot)$. Necht

$$V = H^1(\Omega)$$

je prostor testovacích funkcí. Jestliže klasické řešení $u = u(x, t)$ úlohy (7.1)–(7.3) je dostatečně hladké, pak pro $u = u(\cdot, t)$, $t \in I$ pevné, dostaneme (srov. kap. 6)

$$(7.4) \quad (c\rho v, u'(t))_0 + a(v, u) = F(t; v) \quad \forall v \in V,$$

kde $u' = du/dt$ je časová derivace,

$$a(v, w) = (\mathcal{A} \text{grad } v, \text{grad } w)_{0, \Omega} + \langle \alpha v, w \rangle_{0, \partial\Omega}$$

a

$$F(t; v) = (f(\cdot, t), v)_{0, \Omega} + \langle g(\cdot, t), v \rangle_{0, \partial\Omega}.$$

Slabá formulace klasické úlohy (7.1)–(7.3) spočívá v nalezení $u \in L^2(I, V)$ takového, že $u' \in L^2(I, V)$, (7.4) je splněno pro skoro všechna pevná $t \in I$ a (7.3) pro s.v. $x \in \Omega$. Zde symbol $L^2(I, V)$ označuje prostor všech zobrazení $t \in I \mapsto v(t) \in V$ takových, že existuje integrál

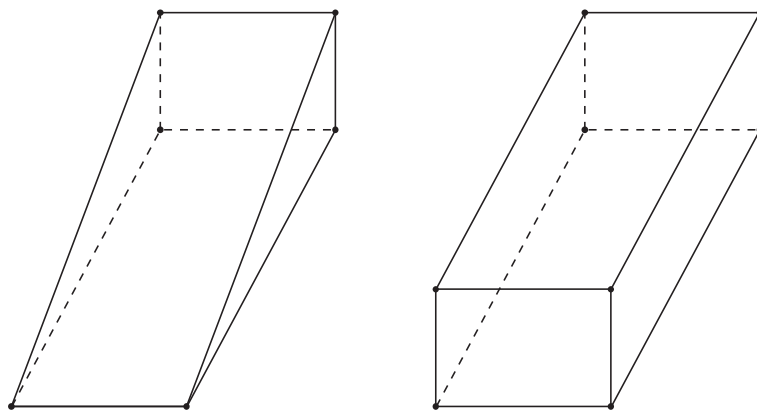
$$\int_0^T \|v(t)\|_V^2 dt.$$

Ten existuje tehdy a jen tehdy, když existuje tzv. Bochnerův integrál z abstraktní funkce (viz monografie [19], [48]).

Více podrobností o těchto prostorech lze nalézt v [67]. Existence a jednoznačnost slabého řešení je studována např. v [35], kap. 3, [48], kap. 11.

7.2. Metoda konečných prvků

Pro $d = 3$ rozdělme $\overline{\Omega}$ na trojboké a čtyřboké hranoly (viz obr. 7.4), což umožňuje respektovat detailní geometrii statoru, termofyzikální vlastnosti všech použitých materiálů a prostorovou hustotu tepelných ztrát. Speciálně budeme předpokládat, že funkce c , ρ , a_{ij} , f jsou konstantní na každém prvku.



Obr. 7.4

Prostory konečných prvků se skládají ze spojitých a po částech polynomiálních funkcí z V , které jsou tvaru

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1x_2 + c_5x_1x_3$$

na trojbokých prizmatických prvcích (viz obr. 7.4 vlevo) a

$$c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1x_2 + c_5x_1x_3 + c_6x_2x_3 + c_7x_1x_2x_3$$

na čtyřbokých prizmatických prvcích (kvádrech).

Numerická analýza může být zřejmě provedena i pro jiné konečné prvky. V tomto paragrafu budeme tedy předpokládat, že $d \in \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{T}_h$ je triangulace mnohostěnu (mnohoúhelníku) $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ a necht'

$$V_h = \{v_h \in V \mid v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

kde $P_1(K) \subset P_K$ pro všechna $K \in \mathcal{T}_h$.

Semidiskrétní Galerkinova aproximace spojitě úlohy (7.4) spočívá v nalezení $u_h = u_h(\cdot, t)$, které patří do V_h pro každé $t \in I$ a splňuje rovnici

$$(7.5) \quad (c\rho v_h, u_h'(t))_0 + a(v_h, u_h) = F(t; v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

pro s.v. $t \in I$. To znamená, že jsme zatím provedli diskretizaci pouze v prostorových proměnných, zatímco časová proměnná zatím zůstává spojitá. Počáteční podmínku (7.3) lze aproximovat například takto:

$$(7.6) \quad (c\rho u_h(0), v_h)_0 = (c\rho u^0, v_h)_0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Budeme uvažovat pouze Lagrangeovy prvky. Nechtě $Z_1, \dots, Z_N$ jsou uzlové body prvků prostorové diskretizace odpovídající prostoru V_h , tj. $N = \dim V_h$. Pak funkce $v^i \in V_h$ takové, že

$$v^i(Z_j) = \delta_{ij} \quad \text{pro } i, j = 1, \dots, N,$$

tvoří bázi ve V_h . Budeme-li hledat u_h ve tvaru

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) v^i(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in I,$$

dostaneme pomocí (7.5) soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$(7.7) \quad \sum_{j=1}^N (c\rho v^i, v^j)_0 z_j'(t) + \sum_{j=1}^N a(v^i, v^j) z_j(t) = F(t; v^i), \quad i = 1, \dots, N,$$

pro neznámé funkce $z_1, \dots, z_N$. Odpovídající počáteční podmínky pro $z_j = z_j(t)$ mohou být stanoveny řešením soustavy

$$(7.8) \quad \sum_{j=1}^N (c\rho v^i, v^j)_0 z_j(0) = (c\rho v^i, u^0)_0, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde u^0 je počáteční podmínka z klasické formulace (viz (7.3)). Označíme-li $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))^T$ vektor neznámých, $M = ((c\rho v^i, v^j)_0)_{i,j=1}^N$ hmotnostní matici (angl. mass matrix), $A = (a(v^i, v^j))_{i,j=1}^N$ matici tuhosti, $\mathcal{F}(t) = (F(t; v^1), \dots, F(t; v^N))^T$ pravou stranu a $\xi^0 = ((c\rho v^1, u^0)_0, \dots, (c\rho v^N, u^0)_0)^T$ počáteční podmínku, úloha (7.7)–(7.8) může být ekvivalentně přepsána do maticového tvaru

$$(7.9) \quad M\xi'(t) + A\xi(t) = \mathcal{F}(t), \quad t \in I,$$

$$(7.10) \quad M\xi(0) = \xi^0.$$

Poznámka 7.1. Snadno nahlédneme, že hmotnostní matice M je symetrická a pozitivně definitní. Tudíž pomocí Choleského rozkladu (viz např. [32], str. 89, [47], str. 446) existuje dolní trojúhelníková matice L taková, že

$$M = LL^T.$$

Zavedeme-li novou proměnnou $y(t) = L^T \xi(t)$, lze soustavu (7.9)–(7.10) ekvivalentně přepsat na počáteční úlohu pro obyčejné diferenciální rovnice

$$(7.11) \quad y'(t) + By(t) = q(t), \quad t \in I,$$

$$(7.12) \quad y(0) = y^0,$$

kde $B = L^{-1}AL^{-T}$ je symetrická a pozitivně definitní matice, $L^{-T} = (L^{-1})^T$, $q = L^{-1}\mathcal{F}$ a $y^0 = L^T\xi^0$. Podle [9], par. III.4, je jediné řešení (7.11)–(7.12) explicitně dáno vztahem

$$(7.13) \quad y(t) = e^{-Bt}y^0 + \int_0^t e^{-B(t-\tau)}q(\tau) d\tau, \quad t \in I,$$

protože (7.11)–(7.12) je lineární soustava a B je konstantní matice (nezávislá na čase). Poznamenejme, že e^{-Bt} je definováno pomocí Taylorova rozvoje

$$e^{-Bt} = I - tB + \frac{1}{2}t^2B^2 - \frac{1}{6}t^3B^3 + \dots,$$

kde I je jednotková matice.

Protože úloha (7.5)–(7.6) je ekvivalentní úloze (7.11)–(7.12), dostáváme následující tvrzení.

Důsledek 7.2. *Úloha (7.5) – (7.6) má právě jedno řešení.*

Lemma 7.3. *Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je silně regulární systém triangulací. Pak existují kladné konstanty C_1 a C_2 takové, že pro každou funkci*

$$v_h = \sum_{i=1}^N \eta_i v^i \in V_h$$

platí

$$C_1 h^d \|\eta\|^2 \leq \|v_h\|_0^2 \leq C_2 h^d \|\eta\|^2 \quad \text{pro } \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N).$$

D ů k a z . (Podrobně viz [29], str. 142.) Nechť $\hat{A}_i \in \hat{K}$, $i = 1, \dots, r$, jsou uzlové body referenčního Lagrangeova konečného prvku $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \Sigma_{\hat{K}})$. Pak pro libovolné $\hat{v} \in P_{\hat{K}}$ platí

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^r \hat{v}(\hat{A}_i) \hat{v}^i,$$

kde $\hat{v}^i \in P_{\hat{K}}$, $i = 1, \dots, r$, jsou standardní báze funkce takové, že $\hat{v}^i(\hat{A}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, r$. Tedy

$$\left(\sum_{i=1}^r \hat{v}(\hat{A}_i) \hat{v}^i \right) \left(\sum_{j=1}^r \hat{v}(\hat{A}_j) \hat{v}^j \right) = \hat{v}^2 \leq r \sum_{i=1}^r \hat{v}^2(\hat{A}_i) (\hat{v}^i)^2.$$

Zintegrujme tuto nerovnost přes $\hat{K}$. Protože Gramova matice $(\hat{v}^i, \hat{v}^j)_{0, \hat{K}}$ je pozitivně definitní, existuje konstanta $\hat{C} > 0$ tak, že

$$\hat{C} \sum_{i=1}^r \hat{v}^2(\hat{A}_i) \|\hat{v}^i\|_{0, \hat{K}}^2 \leq \sum_{i,j=1}^r \hat{v}(\hat{A}_i) \hat{v}(\hat{A}_j) (\hat{v}^i, \hat{v}^j)_{0, \hat{K}} = \|\hat{v}\|_{0, \hat{K}}^2 \leq r \sum_{i=1}^r \hat{v}^2(\hat{A}_i) \|\hat{v}^i\|_{0, \hat{K}}^2.$$

Nechť nyní $v_h \in V_h$, $K \in \mathcal{T}_h$ a $v_K = v_h|_K$. Uvažujme vzájemně jednoznačné lineární afinní zobrazení $F_K : \hat{K} \rightarrow K$, kde $F_K \in (P_1(\hat{K}))^d$. Při tomto zobrazení přejdou uzlové body $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_r$ na $A_1, \dots, A_r$. Pro každé $v_K \in P_K$ a $\hat{x} \in \hat{K}$ položme $\hat{v}(\hat{x}) = v_K(x)$, kde $x = F_K(\hat{x})$. Pak z věty o substituci máme

$$c_1 \sum_{i=1}^r v_K^2(A_i) \|v^i\|_{0, K}^2 \leq \|v_K\|_{0, K}^2 \leq c_2 \sum_{i=1}^r v_K^2(A_i) \|v^i\|_{0, K}^2.$$

Podle definice 3.4 je systém triangulací silně regulární, jestliže se míra K chová jako h^d . Odtud plyne, že $c_3 h^d \leq \|v^i\|_{0,K}^2 \leq c_4 h^d$ a

$$C_1 h^d \sum_{i=1}^r v_h^2(A_i) \leq \|v_h\|_{0,K}^2 \leq C_2 h^d \sum_{i=1}^r v_h^2(A_i).$$

Požadovaný odhad nyní přímo plyne sumací přes všechny prvky $K \in \mathcal{T}_h$. $\square$

Poznámka 7.4. Úlohu (7.9)–(7.10) nebo (7.11)–(7.12) můžeme řešit pomocí standardních numerických metod pro počáteční problémy se silným tlumením typu stiff, protože platí $\lambda_{\min}(B) \ll \lambda_{\max}(B)$ pro malé h , kde $\lambda_{\min}(B)$, resp. $\lambda_{\max}(B)$, označuje nejmenší, resp. největší, vlastní číslo matice B .

Dále dokážeme, že číslo podmíněnosti B je ekvivalentní $\kappa(B) = \mathcal{O}(h^{-2})$ za předpokladu, že systém $\{\mathcal{T}_h\}$ triangulací je silně regulární. Abychom toto viděli, vyšetřujeme nejprve chování čísel podmíněnosti $\kappa(A)$ a $\kappa(M)$ pro $h \rightarrow 0$.

Pro spektrální maticovou normu, jež je indukovaná euklidovskou vektorovou normou $\|\cdot\|$, budeme používat stejný symbol $\|\cdot\|$. Protože matice A je symetrická a pozitivně definitní, podle [47], par. 9.4 a 9.8, a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti platí

$$\|A\| = \lambda_{\max}(A) = \max \eta^T A \eta \leq \max \|A \eta\| = \|A\|$$

pro všechna η na kouli $\|\eta\| = 1$. Nerovnost v předchozím vztahu tedy přejde v rovnost. Odtud plyne, že

$$\|A\| = \max_{\eta \neq 0} \frac{\|A \eta\|}{\|\eta\|} = \max_{\eta \neq 0} \frac{\eta^T A \eta}{\|\eta\|^2} = \lambda_{\max}(A).$$

Silná regularita systému $\{\mathcal{T}_h\}$ implikuje (viz [8])

$$\|v_h\|_1 \leq C h^{-1} \|v_h\|_0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Tato nerovnost se nazývá *inverzní nerovnost* pro prostory konečných prvků. Pomocí věty o stopách 2.8 a inverzní nerovnosti máme

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= (\mathcal{A} \operatorname{grad} v_h, \operatorname{grad} v_h)_{0,\Omega} + \langle \alpha v_h, v_h \rangle_{0,\partial\Omega} \\ &\leq C_1 |v_h|_{1,\Omega}^2 + C_2 \|v_h\|_{0,\partial\Omega}^2 \leq C' \|v_h\|_1^2 \leq C h^{-2} \|v_h\|_0^2 \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Odtud pro

$$v_h = \sum_{i=1}^N \eta_i v^i$$

dostaneme následující vztah pro matici tuhosti A ,

$$\frac{\eta^T A \eta}{\|\eta\|^2} = \frac{a(v_h, v_h)}{\|\eta\|^2} \leq C h^{-2} \frac{\|v_h\|_0^2}{\|\eta\|^2} \leq C_2 h^{d-2} \quad \forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

kde poslední nerovnost vyplývá z lemmatu 7.3.

Z V -eliptičnosti bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ a lemmatu 7.3 navíc plyne, že

$$\frac{\eta^T A \eta}{\|\eta\|^2} = \frac{a(v_h, v_h)}{\|\eta\|^2} \geq C \frac{\|v_h\|_0^2}{\|\eta\|^2} \geq C_1 h^d \quad \forall \eta \neq 0.$$

Tudíž

$$C_1 h^d \leq \lambda_{\min}(A) \leq \|A\| = \lambda_{\max}(A) \leq C_2 h^{d-2}$$

pro dostatečně malá h . Odtud dostáváme

$$\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

Povšimněme si, že pravá strana nezávisí na dimenzi d .

Pro matici M z lemmatu 7.3 máme

$$\frac{\eta^T M \eta}{\|\eta\|^2} = \frac{(c\rho v_h, v_h)_0}{\|\eta\|^2} \leq C \frac{\|v_h\|_0^2}{\|\eta\|^2} \leq C_2 h^d \quad \forall \eta \neq 0,$$

a podobně zjistíme, že

$$\frac{\eta^T M \eta}{\|\eta\|^2} \geq C_1 h^d \quad \forall \eta \neq 0.$$

Proto opět existují dvě kladné konstanty C_1 a C_2 tak, že

$$C_1 h^d \leq \lambda_{\min}(M) \leq \|M\| = \lambda_{\max}(M) \leq C_2 h^d,$$

a tedy

$$\kappa(M) = \frac{\lambda_{\max}(M)}{\lambda_{\min}(M)} = \mathcal{O}(1).$$

Pro inverzní matici platí

$$\|M^{-1}\| = \left(\min_{\eta \neq 0} \frac{\eta^T M \eta}{\|\eta\|^2} \right)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-d}).$$

Protože podobnostní transformace LBL^{-1} nemění vlastní čísla matice B , dostaneme požadovaný vztah

$$\begin{aligned} \|B\| &= \|LBL^{-1}\| = \|LL^{-1}AL^{-T}L^{-1}\| \\ &\leq \|A\| \|L^{-T}L^{-1}\| = \|A\| \|M^{-1}\| = \mathcal{O}(h^{-2}). \end{aligned}$$

Nežli dokážeme konvergenci přibližných řešení u_h , uvedeme si ještě jedno lemma.

Lemma 7.5. *Nechť $\mathcal{I}$ je libovolná indexová množina a nechť B_t , $t \in \mathcal{I}$, je množina symetrických pozitivně semidefinitních matic. Pak existuje konstanta C taková, že*

$$\|B_t e^{-B_t}\| \leq C$$

platí pro všechna $t \in \mathcal{I}$.

D ů k a z . Vlastní čísla symetrické matice $B_t e^{-B_t}$ jsou tvaru $\lambda_t e^{-\lambda_t}$, kde λ_t je vlastní číslo matice B_t . Protože B_t je pozitivně semidefinitní, máme $\lambda_t \in [0, \infty)$. Reálná funkce $\lambda e^{-\lambda}$ reálné proměnné $\lambda \in [0, \infty)$ však nabývá svého maxima v $\lambda = 1$. Odtud plyne tvrzení lemmatu. $\square$

Následující věta udává rychlost konvergence Galerkinových řešení u_h definovaných v (7.5)–(7.6) ke slabému řešení u . Její důkaz je založen na důmyslných postupech obsažených v [29] a [65]. V závěru důkazu použijeme Aubinův-Nitscheův trik (viz větu 3.9).

Věta 7.6. *Necht' $\{\mathcal{T}_h\}$ je silně regulární systém triangulací uzávěru $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ pro $d \in \{1, 2, 3\}$ a necht' $u(t) \in H^2(\Omega)$ pro každé $t \in I$. Necht' slabé řešení z úlohy*

$$a(z, v) = (\theta, v)_0 \quad \forall v \in V$$

patří do $H^2(\Omega)$ pro každé $\theta \in L^2(\Omega)$ a necht'

$$|z|_2 \leq \overline{C} \|\theta\|_0.$$

Pak existuje konstanta $C > 0$ tak, že

$$\max_{t \in I} \|u(t) - u_h(t)\|_0 \leq Ch^2 \left(1 + \left| \ln \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in I} |u(t)|_2.$$

D ů k a z . Uvažujme následující duální problém pro neznámou funkci $\varphi_h : (0, t) \rightarrow V_h$, $t \in I$,

$$(7.14) \quad -(c\rho v_h, \varphi'_h(\tau))_0 + a(v_h, \varphi_h(\tau)) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \tau \in (0, t),$$

$$(7.15) \quad \varphi_h(t) = e_h(t),$$

kde

$$e_h(\tau) = u_h(\tau) - \tilde{u}_h(\tau)$$

a kde $\tilde{u}_h(\tau) \in V_h$ je tzv. *eliptická projekce* přesného řešení $u(\tau)$, která je jednoznačně definovaná podmínkou ortogonalit

$$(7.16) \quad a(v_h, u(\tau) - \tilde{u}_h(\tau)) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \tau \in I.$$

Pro jednoduchost polo

$$\theta(\tau) = u(\tau) - \tilde{u}_h(\tau).$$

Použitím (7.4), (7.5), (7.6) a (7.3) dostaneme, že

$$(c\rho\varphi_h, u'_h)_0 + a(\varphi_h, u_h) = (c\rho\varphi_h, u')_0 + a(\varphi_h, u),$$

$$(c\rho u_h(0), \varphi_h(0))_0 = (c\rho u(0), \varphi_h(0))_0.$$

Odtud a z definic e_h a θ vyplývá, že

$$(7.17) \quad (c\rho\varphi_h, e'_h)_0 + a(\varphi_h, e_h) = (c\rho\varphi_h, \theta')_0 + a(\varphi_h, \theta),$$

$$(7.18) \quad (c\rho e_h(0), \varphi_h(0))_0 = (c\rho\theta(0), \varphi_h(0))_0.$$

Polo

$$\begin{aligned} (c\rho e_h(t), e_h(t))_0 &= \int_0^t [-(c\rho e_h(\tau), \varphi'_h(\tau))_0 + a(e_h(\tau), \varphi_h(\tau))] d\tau + (c\rho e_h(t), \varphi_h(t))_0 \\ &= \int_0^t [(c\rho\varphi_h, e'_h)_0 + a(\varphi_h, e_h)] d\tau + (c\rho e_h(0), \varphi_h(0))_0 \\ &= \int_0^t [(c\rho\varphi_h, \theta')_0 + a(\varphi_h, \theta)] d\tau + (c\rho\theta(0), \varphi_h(0))_0 \\ &= - \int_0^t (c\rho\theta, \varphi'_h)_0 d\tau + (c\rho\theta(t), \varphi_h(t))_0. \end{aligned}$$

Dále odvodíme odhady pro φ_h a jeho časovou derivaci (srov. (7.28) a (7.29)). Úloha (7.14)–(7.15) lze převést na řešení soustavy homogenních obyčejných diferenciálních rovnic s koncovou podmínkou

$$\begin{aligned} -M\xi'(\tau) + A\xi(\tau) &= 0, \quad \tau \in (0, t), \\ M\xi(t) &= \xi^0, \end{aligned}$$

což je podobně jako v poznámce 7.1 ekvivalentní úloze

$$\begin{aligned} (7.20) \quad -y'(\tau) + By(\tau) &= 0, \quad \tau \in (0, t), \\ y(t) &= y^0, \end{aligned}$$

kde $B = L^{-1}AL^{-T}$, $M = LL^T$, $y(\tau) = L^T\xi(\tau)$ a $y^0 = L^T\xi^0$. Řešení soustavy (7.20) je dáno vztahem (srov. (7.13))

$$(7.21) \quad y(\tau) = e^{-(t-\tau)B}y(t).$$

Matice $e^{-(t-\tau)B}$ je symetrická a její vlastní čísla jsou rovna $e^{-(t-\tau)\lambda_i}$, $i = 1, \dots, N$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice B . Protože B je symetrická a pozitivně definitní, platí $\lambda_i > 0$, a proto žádné vlastní číslo matice $e^{-(t-\tau)B}$ není větší než jedna pro $\tau \in \langle 0, t \rangle$. Tudíž

$$\|e^{-(t-\tau)B}\| \leq 1$$

a podle (7.21) platí, že

$$(7.22) \quad \|y(\tau)\| \leq \|y(t)\| \quad \forall \tau \in (0, t).$$

Derivujeme-li (7.21) podle τ , dostaneme

$$y'(\tau) = Be^{-(t-\tau)B}y(t) = \frac{1}{t-\tau}(t-\tau)Be^{-(t-\tau)B}y(t).$$

Odtud a z lemmatu 7.5 vidíme, že

$$(7.23) \quad \|y'(\tau)\| \leq \frac{C}{t-\tau}\|y(t)\|.$$

Zřejmě

$$(7.24) \quad \int_0^t \|y'(\tau)\| d\tau = \int_0^{t-h^2} \|y'(\tau)\| d\tau + \int_{t-h^2}^t \|y'(\tau)\| d\tau.$$

První člen na pravé straně můžeme odhadnout pomocí (7.23),

$$(7.25) \quad \int_0^{t-h^2} \|y'(\tau)\| d\tau \leq C\|y(t)\| \left| \int_0^{t-h^2} \frac{d\tau}{t-\tau} \right| = C\|y(t)\| \left| \ln \frac{t}{h^2} \right|.$$

Abychom odhadli druhý člen pravé strany rovnosti (7.24), použijeme (7.20) a (7.22),

$$(7.26) \quad \int_{t-h^2}^t \|y'(\tau)\| \, d\tau = \int_{t-h^2}^t \|By(\tau)\| \, d\tau \leq h^2 \|B\| \|y(t)\| \leq C \|y(t)\|,$$

kde poslední nerovnost plyne ze skutečnosti, že $\|B\| = \mathcal{O}(h^{-2})$, viz poznámku 7.4. Dosadíme-li (7.25) a (7.26) do (7.24), dostaneme

$$(7.27) \quad \int_0^t \|y'(\tau)\| \, d\tau \leq C \|y(t)\| \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right).$$

Protože $y(t) = L^T \xi(t)$, podle poznámky 7.4 platí

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|^2 &= \|L^{-T} y(t)\|^2 = (M^{-1} y(t), y(t)) \leq Ch^{-d} \|y(t)\|^2 \\ &= Ch^{-d} (L^T \xi(t), L^T \xi(t)) = Ch^{-d} (\xi(t), M \xi(t)) \leq \tilde{C} \|\xi(t)\|^2. \end{aligned}$$

Odtud a z lemmatu 7.3 plyne existence kladných konstant $C_1, \dots, C_4$ tak, že

$$(7.28) \quad \begin{aligned} C_1 \|y(t)\|^2 &\leq C_2 h^d \|\xi(t)\|^2 \leq \|\varphi_h(t)\|_0^2 \leq C_3 h^d \|y(t)\|^2 \leq C_4 \|y(t)\|^2, \\ C_1 \|y'(\tau)\|^2 &\leq C_2 h^d \|\xi'(\tau)\|^2 \leq \|\varphi'_h(\tau)\|_0^2 \leq C_3 h^d \|\xi'(\tau)\|^2 \leq C_4 \|y'(\tau)\|^2. \end{aligned}$$

Užijeme-li (7.28) a (7.27), obdržíme

$$\int_0^t \|\varphi'_h(\tau)\|_0 \, d\tau \leq C \|\varphi_h(t)\|_0 \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right).$$

A tedy podle (7.15)

$$(7.29) \quad \int_0^t \|\varphi'_h(\tau)\|_0 \, d\tau \leq C \|e_h(t)\|_0 \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right).$$

Nyní jsme již téměř hotovi. Z (7.19), (7.15) a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti plyne, že

$$\begin{aligned} \|e_h(t)\|_0^2 &\leq C(\rho e_h(t), e_h(t))_0 \\ &\leq C_1 \|\theta(t)\|_0 \|e_h(t)\|_0 + C_2 \int_0^t \|\theta(\tau)\|_0 \|\varphi'_h(\tau)\|_0 \, d\tau. \end{aligned}$$

Tudíž podle (7.29) a ze spojitosti θ

$$\|e_h(t)\|_0^2 \leq C_1 \|e_h(t)\|_0 \left(1 + C \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right)\right) \max_{\tau \in [0, t]} \|\theta(\tau)\|_0,$$

a proto

$$(7.30) \quad \|e_h(t)\|_0 \leq C \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right) \max_{\tau \in [0, t]} \|\theta(\tau)\|_0.$$

Píšeme-li diskretizační chybu $u - u_h$ ve tvaru

$$u - u_h = u - \tilde{u}_h + \tilde{u}_h - u_h = \theta - e_h$$

a uijeme-li (7.30), dostaneme

$$(7.31) \quad \|u(t) - u_h(t)\|_0 \leq C \left(1 + \left| \ln \frac{t}{h^2} \right| \right) \max_{\tau \in [0, t]} \|\theta(\tau)\|_0.$$

Nyní již stačí odhadnout normu funkce θ . Definujme $z \in V$ rovnicí (srov. větu 3.9)

$$(7.32) \quad a(z, v) = (\theta, v)_0 \quad \forall v \in V.$$

Potom podle předpokladů věty je $z \in H^2(\Omega)$ a

$$(7.33) \quad |z|_2 \leq C \|\theta\|_0.$$

Nechť $\pi_h z \in V_h$ je V_h -interpolace funkce z . Díky Sobolevově větě o vnoření 2.11 je dobře definována pro $d \leq 3$. Ze standardních aproximačních vlastností π_h (viz větu o interpolaci 3.6) a z odhadu (7.33) máme

$$(7.34) \quad \|z - \pi_h z\|_1 \leq Ch |z|_2 \leq C' h \|\theta\|_0.$$

Protože $\theta = u - \tilde{u}_h$, pomocí (7.16) dále platí, že

$$(7.35) \quad \|\theta\|_1 = \|u - \tilde{u}_h\|_1 \leq Ch |u|_2,$$

kde poslední nerovnost plyne ze Céova lemmatu 3.2 a věty 3.7, neboť eliptická projekce $\tilde{u}_h$ je definována pomocí podmínky ortogonality. Tudíž $\theta \in V = H^1(\Omega)$ může být použita jako testovací funkce v (7.32) a podle (7.16) vidíme, že

$$(7.36) \quad a(\pi_h z, \theta) = 0.$$

Využijeme-li (7.32), (7.36), spojitost formy $a(\cdot, \cdot)$, (7.34) a (7.35), dostaneme

$$(7.37) \quad \begin{aligned} \|\theta\|_0^2 &= (\theta, \theta)_0 = a(z, \theta) = a(z - \pi_h z, \theta) \\ &\leq C_1 \|z - \pi_h z\|_1 \|\theta\|_1 \leq C_2 h \|\theta\|_0 h |u|_2. \end{aligned}$$

Tato nerovnost a (7.31) vedou k tvrzení věty. $\square$

Poznámka 7.7. Předpoklad H^2 -regularity z věty 7.6 není splněn pro problém vedení tepla ve statoru, protože odpovídající termofyzikální koeficienty jsou nespojitě (po částech konstantní). Pro Sobolevovy prostory s neceločíselnou derivací lze dokázat konvergenci u_h k u za slabších hladkostních předpokladů. Nechť tedy $\varepsilon \in (0, 1)$ a nechť $u(t) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ pro každé $t \in I$. Předpokládejme, že slabé řešení z rovnice (7.32) splňuje nerovnost (srov. (7.33))

$$(7.38) \quad |z|_{1+\varepsilon} \leq C \|\theta\|_0.$$

Pak z aproximačních vlastností π_h (viz [13]) dostáváme

$$\|z - \pi_h z\|_1 \leq Ch^\varepsilon |z|_{1+\varepsilon} \leq C' h^\varepsilon \|\theta\|_0$$

(srov. (7.34)), a tak (7.37) lze přepsat takto:

$$\|\theta\|_0^2 \leq C_1 \|z - \pi_h z\|_1 \|\theta\|_1 \leq C_2 h^\varepsilon \|\theta\|_0 h^\varepsilon |u|_{1+\varepsilon}.$$

Odtud a z (7.31) konečně dostaneme

$$\max_{t \in I} \|u(t) - u_h(t)\|_0 \leq Ch^{2\varepsilon} \left(1 + \left| \ln \frac{T}{h^2} \right| \right) \max_{t \in I} |u(t)|_{1+\varepsilon}$$

za předpokladu, že $\{\mathcal{T}_h\}$ je silně regulární.

$H^{1+\varepsilon}$ -regularita přesného řešení úlohy (7.38) se vyšetřuje např. v [41].

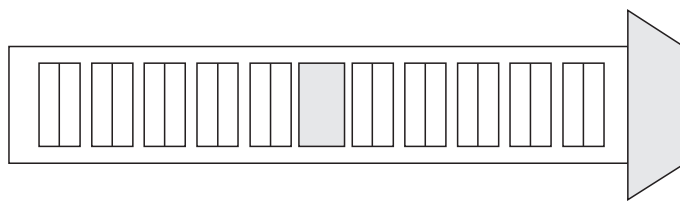
Poznámka 7.8. Konvergence metody konečných prvků po časové diskretizaci problému (7.5)–(7.6) je studována např. v [8] či [29].

Poznámka 7.9. Problém (7.1)–(7.3) můžeme také nejprve diskretizovat v čase. Takový přístup je založen na Rotheově metodě (viz např. [48]).

7.3. Numerický příklad

Pokud teplota na povrchu vodičů přesáhne jistou mez, jejich izolace začne hořet. Izolaci také nesevčí, je-li rozdíl teplot na jednom jejím milimetru větší než jistá předepsaná mez (např. 30 [°C]). Proto je znalost detailního rozložení teploty velice důležitá při návrhu elektrických rotačních strojů.

Použijme navrženou metodu z předchozího paragrafu k výpočtu teplotního pole ve statoru čtyřpólového třífázového asynchronního motoru o výkonu 4000 kW. Tento motor má 96 drážek (viz obr. 7.2) a 12 radiálních ventilačních kanálů širokých 0.01 m. Šířka každého paketu je 0.046 m. Na obr. 7.5 je znázorněn průřez drážkou, který obsahuje 10 složených vodičů obalených izolací.



Obr. 7.5

Koeficient přestupu tepla α se rovná 0 na čtyřech rovinách symetrie (dvě z nich obsahují osu rotace rotoru a další dvě jsou kolmé k této ose – viz obr. 7.1–7.3). Rozložení koeficientu přestupu tepla α ve ventilačních kanálech je poněkud komplikované, leží v intervalu od 44 do 179 [W/m²K]. Termofyzikální vlastnosti měděných vodičů (Cu), železných plechů (Fe) a izolace (Iz) jsou následující: specifické teplo $c_{\text{Cu}}=386$ [J/kgK], $c_{\text{Fe}}=451$ [J/kgK], $c_{\text{Iz}}=856$ [J/kgK], hustota $\rho_{\text{Cu}}=8890$ [kg/m³], $\rho_{\text{Fe}}=7850$ [kg/m³], $\rho_{\text{Iz}}=2300$ [kg/m³], tepelné vodivosti $a_{\text{Cu}}=332.8$ [W/mK], $a_{\text{Fe}}=40$ [W/mK] podél statorových plechů a $a'_{\text{Fe}}=1.1$ [W/mK] napříč plechy, $a_{\text{Iz}}=0.5$ [W/mK] podél izolačních vrstev a $a'_{\text{Iz}}=0.2$ [W/mK] napříč izolací.

Výpočet hustoty tepelných zdrojů f (a g) je založen na speciálních programech, které využívají informace o střídavých elektrických proudech a magnetickém poli. Dále předpokládáme, že $f = 0$ v izolaci vodičů. Počáteční podmínka u^0 je volena konstantní na celé oblasti Ω a rovná pokojové teplotě 20 [°C].

Abychom úlohu zdiskretizovali v čase, použijeme známé *Crankovo-Nicolsonové schéma*. Označme symbolem Δt pevný časový krok (např. $\Delta t=5$ [s]). Nechť $\mathbf{f}^r$ je hodnota $\mathcal{F}$ na r -té časové vrstvě. Budeme aproximovat (7.9) symetricky vzhledem k $(r + \frac{1}{2})\Delta t$. Pak obdržíme

$$M \frac{\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r}{\Delta t} + A \frac{\mathbf{z}^{r+1} + \mathbf{z}^r}{2} = \frac{\mathbf{f}^{r+1} + \mathbf{f}^r}{2},$$

kde vektor $\mathbf{z}^r$ označuje přibližné hodnoty $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ na r -té časové vrstvě. Proto můžeme vypočítat $\mathbf{z}^{r+1}$ z rekurentní rovnice

$$(M + \frac{1}{2}\Delta t A)\mathbf{z}^{r+1} = (M - \frac{1}{2}\Delta t A)\mathbf{z}^r + \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{f}^{r+1} + \mathbf{f}^r), \quad r = 0, 1, \dots,$$

$$\mathbf{z}^0 = (z_1(0), \dots, z_N(0))^T.$$

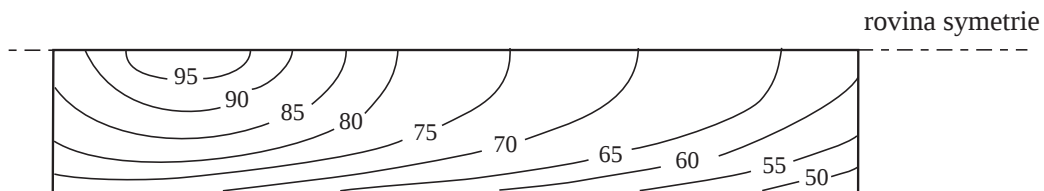
Pokud na počátku výpočtu provedeme Choleského rozklad

$$LL^T = M + \frac{1}{2}\Delta t A,$$

kde L je dolní trojúhelníková matice, pak snadno vypočteme aproximaci řešení $\mathbf{z}^r$ na každé časové vrstvě.

K dosažení numericky stacionárního stavu z počáteční konstantní pokojové teploty je zapotřebí asi $t = 20$ minut.

Na obr. 7.6 vidíme stacionární teplotní pole na horní části oblasti z obr. 7.3.



Obr. 7.6

8. ŘEŠENÍ ČASOVĚ PERIODICKÝCH MAXWELLOVÝCH ROVNIC

8.1. Klasická formulace

V této kapitole budeme používat prostory komplexních funkcí. Z kapitoly 2 již víme, že takové prostory jsou definovány podobně jako v reálném případě. Připomeňme, že standardní skalární součin je v komplexním prostoru $L^2(\Omega)$ definován vztahem

$$(v, w)_0 = \int_{\Omega} v w^C dx, \quad v, w \in L^2(\Omega),$$

kde $w^C = \operatorname{Re} w - i \operatorname{Im} w$ je číslo komplexně sdružené s w .

V tomto paragrafu nejprve ukážeme, že řešení časově periodických Maxwellových rovnic s reálnými koeficienty můžeme převést na řešení časově nezávislých parciálních diferenciálních rovnic s komplexními koeficienty.

Uvažujme Maxwellovy rovnice (srov. (1.1))

$$(8.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathcal{H} - \mathcal{J}, \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathcal{E}, \end{aligned}$$

v trojrozměrné oblasti $\Omega \in \mathcal{L}$, kde $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$ je elektrická indukce, $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$ je magnetická indukce, $\mathcal{E}$ je intenzita elektrického pole, $\mathcal{H}$ je intenzita magnetického pole, ε je permitivita, μ je permeabilita, $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$ je proudová hustota a σ je reálná matice elektrických vodivostí typu 3×3 . Předpokládejme, že $\mathcal{E}$ a $\mathcal{H}$ jsou časově periodické funkce s úhlovou rychlostí $\omega > 0$, tj.

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t) &= \operatorname{Re}(E(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t}), \\ \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, t) &= \operatorname{Re}(H(x_1, x_2, x_3)e^{i\omega t}), \end{aligned}$$

kde E a H jsou komplexní funkce nezávislé na čase a

$$\operatorname{Re}(v_1, v_2, v_3) = (\operatorname{Re} v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Re} v_3).$$

Navíc budeme předpokládat, že $\partial \mathcal{D} / \partial t = 0$ a že μ je kladná konstanta v celé oblasti. Permeabilita měděných či aluminiových vodičů, izolace, oleje, vzduchu apod. je téměř rovna permeabilitě vakua. Na druhé straně matice elektrických vodivostí σ se může dost značně měnit.

Předchozí předpoklady nám umožňují převést soustavu (8.1) – (8.2) na následující soustavu, kde se čas již nevyskytuje

$$(8.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \sigma E && \text{v } \Omega, \\ \operatorname{rot} E &= -i\omega \mu H && \text{v } \Omega. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že H může být přímo vypočítáno ze znalosti E ,

$$H = -\frac{\operatorname{rot} E}{i\omega\mu},$$

a pro E dostaneme rovnici

$$(8.4) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} E + i\omega\mu\sigma E = 0 \quad \text{v } \Omega.$$

Poznamenejme, že H formálně splňuje tutéž rovnici v těch částech Ω , kde je σ konstantní,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H + i\omega\mu\sigma H = 0.$$

Okrajové podmínky můžeme předepsat kupříkladu takto:

$$(8.5) \quad n \times E = n \times \tilde{E} \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Zde $n = (n_1, n_2, n_3)$ je vnější jednotková normála k hranici $\partial\Omega$ a $\tilde{E}$ je zadaná vektorová funkce, kterou je obvykle vhodné definovat na celém uzávěru $\overline{\Omega}$.

Protože $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$, první rovnice v (8.3) dává $\operatorname{div}(\sigma E) = 0$ v Ω . Hledá se tedy komplexní vektorová funkce $u = E - \tilde{E}$ tak, že

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} u + i\omega\mu\sigma u &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{E} - i\omega\mu\sigma \tilde{E} \quad \text{v } \Omega, \\ \operatorname{div}(\sigma u) &= -\operatorname{div}(\sigma \tilde{E}) \quad \text{v } \Omega, \\ n \times u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zde předpokládáme, že $u, \tilde{E} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$ a $\sigma \in (C^1(\overline{\Omega}))^{3 \times 3}$ je reálná symetrická stejnoměrně pozitivně definitní matice. Slabá formulace této trojrozměrné úlohy a její numerické řešení se podrobně vyšetřuje v [33]. V následujícím paragrafu se pro jednoduchost budeme zabývat jen dvojrozměrnou úlohou.

8.2. Galerkinova metoda

Poznámka 8.1. Ve dvojrozměrném prostoru se definují dva operátory rotace, které se obvykle označují

$$(8.6) \quad \operatorname{curl} E = (\partial_2 E, -\partial_1 E)^T,$$

$$(8.7) \quad \operatorname{rot} H = \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1,$$

kde E , resp. $H = (H_1, H_2)$, je skalární, resp. vektorová, funkce definovaná na dvojrozměrné oblasti Ω . Vidíme, že curl převádí skalární funkci na vektorovou, zatímco rot udělá z vektorové funkce skalární. Jestliže vztah (1.3) uvažujeme pro polarizované elektrické pole $\vec{E}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, E(x_1, x_2))^T$ nezávislé na x_3 , pak operátor curl definovaný vztahem (8.6) vlastně odpovídá prvním dvěma složkám rotace ze vztahu (1.3). Na druhé straně operátor rot definovaný vztahem (8.7) je vlastně třetí (poslední) složka standardního operátoru rotace ze vztahu (1.3). I když se operátory rot pro dvojrozměrný a trojrozměrný případ označují stejně, nemůže dojít k nedorozumění.

Dále budeme vyšetřovat následující soustavu vznikající např. při výpočtu stínění cívek v transformátoru (viz [33]) nebo v geofyzice (viz [32]).

$$(8.8) \quad \operatorname{rot} H = \sigma E \quad \text{v } \Omega ,$$

$$(8.9) \quad \operatorname{curl} E = -i\omega\mu H \quad \text{v } \Omega ,$$

$$(8.10) \quad E = \tilde{E} \quad \text{na } \partial\Omega ,$$

kde je σ skalární funkce charakterizující elektrickou vodivost, μ je opět magnetická permeabilita, $\omega > 0$ je úhlová frekvence, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí a $\tilde{E}$ je zadaná dostatečně hladká komplexní funkce definovaná na $\overline{\Omega}$.

Poznamenejme, že časově proměnné funkce

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, t) &= (0, 0, \operatorname{Re} E(x_1, x_2)e^{i\omega t})^T, \\ \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3, t) &= (\operatorname{Re} H_1(x_1, x_2)e^{i\omega t}, \operatorname{Re} H_2(x_1, x_2)e^{i\omega t}, 0)^T \end{aligned}$$

pak splňují standardní časově závislé Maxwellovy rovnice v $\mathbb{R}^3$.

Nechť μ je kladná konstanta v celé oblasti Ω . Na druhé straně vodivost $\sigma \geq 0$ se může podstatně měnit. Jestliže E je dostatečně hladká funkce, potom z (8.8) a (8.9) vyplývá, že

$$(8.11) \quad \operatorname{rot} \operatorname{curl} E = -i\omega\mu \operatorname{rot} H = -i\omega\mu\sigma E .$$

Povšimněme si předně, že $\operatorname{rot} \operatorname{curl} E = -\Delta E$. Zavedeme-li novou neznámou $u = E - \tilde{E}$, pak z (8.11) a (8.10) dostaneme Helmholtzovu rovnici

$$(8.12) \quad -\Delta u + i\omega\mu\sigma u = \Delta \tilde{E} - i\omega\mu\sigma \tilde{E} \quad \text{v } \Omega$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami

$$(8.13) \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega .$$

Variační formulace úlohy (8.12)–(8.13) spočívá v nalezení funkce $u \in H_0^1(\Omega)$ takové, že

$$(8.14) \quad a(v, u) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) ,$$

kde

$$(8.15) \quad a(v, u) = (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} u)_0 - i\omega\mu(v, \sigma u)_0$$

a

$$(8.16) \quad F(v) = -(\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \tilde{E})_0 + i\omega\mu(v, \sigma \tilde{E})_0 .$$

Nadále budeme předpokládat, že $\tilde{E} \in H^1(\Omega)$ a že $\sigma \geq 0$ je reálná funkce z $L^\infty(\Omega)$.

Nyní ověříme, zda jsou splněny předpoklady Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 pro úlohu (8.14). Forma (8.16) je zřejmě lineární na prostoru $V = H_0^1(\Omega)$, protože skalární součin $(\cdot, \cdot)_0$ je lineární v první složce (ale ne ve druhé složce). Protože $(\cdot, \cdot)_0$ je sesquilineární, forma $a(\cdot, \cdot)$ definovaná (8.15) je rovněž sesquilineární. Z (8.15) vidíme, že

$$(8.17) \quad \begin{aligned} |a(v, w)| &\leq \|\text{grad } v\|_0 \|\text{grad } w\|_0 + \omega\mu \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_0 \|w\|_0 \\ &\leq C \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall v, w \in V, \end{aligned}$$

tj. sesquilineární forma $a(\cdot, \cdot)$ je spojitá. Podobně zjistíme, že F je lineární spojitý funkcionál. Dále vidíme, že $a(\cdot, \cdot)$ je V -eliptická

$$|a(v, v)| \geq \text{Re } a(v, v) = \|\text{grad } v\|_0^2 \geq C \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V,$$

kde poslední nerovnost plyne z Friedrichsovy nerovnosti (2.32) pro $C > 0$. Tudíž podle Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 existuje právě jedno řešení

$$(8.18) \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

úlohy (8.14).

Lemma 8.2. *Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ohraničená konvexní oblast a $\tilde{E} \in H^2(\Omega)$. Pak pro řešení úlohy (8.14) platí, že*

$$(8.19) \quad u \in H^2(\Omega)$$

(tj. druhé derivace funkce u jsou v $L^2(\Omega)$, i když má funkce elektrické vodivosti σ skoky).

D ů k a z . Přepíšme (8.12) a (8.13) pro reálnou a imaginární část následovně

$$(8.20) \quad \begin{aligned} -\Delta u_1 &= \omega\mu\sigma u_2 - \Delta \tilde{E}_1 + \omega\mu\sigma \tilde{E}_2 \quad \text{v } \Omega, \\ -\Delta u_2 &= -\omega\mu\sigma u_1 + \Delta \tilde{E}_2 - \omega\mu\sigma \tilde{E}_1 \quad \text{v } \Omega, \end{aligned}$$

$$(8.21) \quad u_1 = u_2 = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde $u = u_1 + iu_2$ a $\tilde{E} = \tilde{E}_1 + i\tilde{E}_2$. V tomto důkaze se budou všechny prostory skládat z reálných funkcí. Podle (8.18)

$$\|\sigma u_j\|_0^2 \leq \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|u_j\|_0^2 \leq C \|u_j\|_1^2 < \infty \quad \text{pro } j = 1, 2,$$

a tak $\omega\mu\sigma u_j \in L^2(\Omega)$. Protože $\tilde{E}_j \in H^2(\Omega)$, vidíme, že obě pravé strany soustavy (8.20) patří do $L^2(\Omega)$. Tedy každé u_j splňuje Poissonovu rovnici s pravou stranou v $L^2(\Omega)$ a homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Protože Ω je konvexní, platí podle [30], že $u_j \in H^2(\Omega)$, $j = 1, 2$. $\square$

Poznámka 8.3. Jestliže Ω je obdélník a Γ je sjednocení jeho dvou protilehlých stran, pak řešení u úlohy (8.12) patří do $H^2(\Omega)$ také pro smíšené okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{na } \Gamma, \\ \partial_n u &= 0 & \text{na } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{aligned}$$

za předpokladu, že $\tilde{E} \in H^2(\Omega)$.

Při Galerkinově metodě pro úlohu (8.14) se hledá $u_h \in V_h$ tak, že

$$(8.22) \quad a(v_h, u_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

kde V_h je konečněrozměrný podprostor prostoru $H_0^1(\Omega)$. Podle Laxova-Milgramova lemmatu 2.3 opět vidíme, že existuje právě jedno řešení $u_h \in V_h$. Navíc H^2 -regularita přesného řešení (viz (8.19)) nám umožňuje získat konvergenci řádu $\mathcal{O}(h)$ Galerkinových řešení u_h k přesnému řešení u v normě $\|\cdot\|_1$. K tomu stačí silná regularita systému $\{\mathcal{T}_h\}$ triangulací konvexní uzavřené oblasti $\overline{\Omega}$ a splnění podmínky

$$P_K \supseteq P_1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Nechť $\{v^j\}_{j=1}^N$ je báze ve V_h . Hledáme-li řešení u_h úlohy (8.22) jako lineární kombinaci bázevých funkcí, dostaneme soustavu

$$(8.23) \quad \sum_{k=1}^N a(v^j, v^k) c_k = F(v^j) \quad , \quad j = 1, \dots, N,$$

pro komplexní neznámé c_k . Podle (8.15) matice $A = (a(v^j, v^k))_{j,k=1}^N$ není nikdy hermitovská. Tudíž standardní metoda sdružených gradientů pro soustavu (8.23) obecně nekonverguje. Rovněž superrelaxační metoda nemusí konvergovat, i když relaxační parametr $\omega \neq 1$ je blízko 1 a je obecně komplexní. Z (8.15) je patrné, že matice tuhosti A bude symetrická, jestliže zvolíme bázevých funkce $v^1, \dots, v^N$ reálné. To je zřejmě vždy možné. V tomto případě koeficienty c_k zůstávají komplexní a Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje (viz [62], str. 73). Jiná možnost je použít přímé metody, např. Gaussovu eliminaci. Abychom šetřili paměť počítače, je pro řešení (8.23) lepší používat přímo komplexní aritmetiku, než řešit diskrétní analogii reálné soustavy (8.20)–(8.21). V komplexním případě totiž vychází počet rovnic i šíře pásu A poloviční. Rovněž počet nenulových diagonál je menší než při rozkladu na reálnou a imaginární část. Navíc komplexní aritmetika je běžnou součástí mnoha programovacích jazyků.

Poznámka 8.4. Nechť

$$A = A_1 + iA_2$$

je regulární matice taková, že A_i jsou reálné čtvercové matice. Jestliže A_1 je také regulární, pak zřejmě platí

$$(A_1 + iA_2)(I - iA_1^{-1}A_2) = A_1 + A_2A_1^{-1}A_2,$$

a tedy

$$A = (A_1 + A_2 A_1^{-1} A_2)(I - i A_1^{-1} A_2)^{-1}.$$

Odtud snadno nahlédneme, že

$$A^{-1} = (A_1 + A_2 A_1^{-1} A_2)^{-1} - i A_1^{-1} A_2 (A_1 + A_2 A_1^{-1} A_2)^{-1}.$$

8.3. Metoda bikonjugovaných gradientů

V tomto paragrafu stručně představíme metodu bikonjugovaných gradientů – BCG (angl. biconjugate gradient method) pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(8.24) \quad Ax = b,$$

kde A je daná komplexní regulární matice typu $N \times N$, $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ je vektor komplexních neznámých a $b = (b_1, \dots, b_N)^T$ je zadaný vektor pravé strany s komplexními složkami. Metoda BCG je velice efektivní zejména tehdy, je-li matice A řídká a velká (srov. (8.23)).

Připomeňme, že α^C označuje číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu α . Podobně A^C je matice komplexně sdružená k A . Dále necht

$$A^H = (A^C)^T,$$

tj. A^H je komplexně sdružená k transponované matici A^T . V tomto případě říkáme, že matice A^H je *hermitovsky* sdružená k A . Podobně pro sloupcový vektor r označíme symbolem $r^H = (r^C)^T$ řádkový vektor, který je komplexně sdružený k r .

Metoda bikonjugovaných gradientů pro soustavu (8.24) je definována následujícím způsobem. Necht x_0 je počáteční přiblížení k řešení soustavy (8.24) a necht $\tilde{r}_0$ je libovolný N -rozměrný sloupcový vektor takový, že $\tilde{p}_0^H A p_0 \neq 0$ a $\tilde{r}_0^H r_0 \neq 0$, kde

$$(8.25) \quad p_0 = r_0 = b - Ax_0, \quad \tilde{p}_0 = \tilde{r}_0.$$

Pak položíme

$$\left. \begin{aligned} (8.26) \quad & \alpha_k = \frac{\tilde{r}_k^H r_k}{\tilde{p}_k^H A p_k}, \\ (8.27) \quad & x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \\ (8.28) \quad & r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k, \\ (8.29) \quad & \tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \alpha_k^C A^H \tilde{p}_k, \\ (8.30) \quad & \beta_k = \frac{\tilde{r}_{k+1}^H r_{k+1}}{\tilde{r}_k^H r_k}, \\ (8.31) \quad & p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, \\ (8.32) \quad & \tilde{p}_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + \beta_k^C \tilde{p}_k, \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots$$

Necht

$$(8.33) \quad M = \inf \{k \in \{1, 2, \dots\} \mid \tilde{p}_k^H A p_k = 0 \text{ nebo } \tilde{r}_k^H r_k = 0\},$$

tzn., že algoritmus metody bikonjugovaných gradientů (8.25)–(8.32) *neselže* během M iterací.

Jestliže $x_0, \dots, x_M$ a $r_0, \dots, r_M$ jsou definovány vztahy (8.25)–(8.32), pak lze dokázat (viz [33]), že

$$r_k = b - Ax_k, \quad k = 0, \dots, M,$$

tj. $r_0, \dots, r_M$ představují konečnou posloupnost reziduí. Dále lze ukázat, že BCG algoritmus končí během nejvýše N iterací a že posloupnosti vektorů $\{r_k\}$, $\{\tilde{r}_k\}$ jsou *biortogonální*

$$\tilde{r}_k^H r_l = 0$$

a posloupnosti vektorů $\{p_k\}$, $\{\tilde{p}_k\}$ jsou *bikonjugované*

$$\tilde{p}_k^H A p_l = 0,$$

kde $k, l \in \{0, \dots, M\}$ a $k \neq l$.

Poznámka 8.5. Jestliže $r_M = 0$, pak x_M je přesné řešení soustavy (8.24). Jestliže ale $r_M \neq 0$, pak z (8.33) plyne, že $\tilde{p}_M^H A p_M = 0$ nebo $\tilde{r}_M^H r_M = 0$, což znamená, že algoritmus selhal. Tento případ však nastává vzácně při praktickém počítání. Pokud k selhání dojde, pak musíme začít znovu s jinou počáteční hodnotou (např. $x_0 = x_M$).

Poznámka 8.6. Necht A je hermitovská matice, tj.

$$A = A^H.$$

Jestliže $\tilde{r}_0 = r_0$, pak BCG algoritmus (8.25)–(8.32) vede na standardní *metodu sdružených gradientů* s reálnými koeficienty α_k , β_k a vektory

$$\tilde{p}_k = p_k, \quad \tilde{r}_k = r_k, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

které jsou obecně komplexní (reálné jsou, když A je reálná).

Poznámka 8.7. Problém (8.24) lze transformovat na úlohu

$$A^H A x = A^H b,$$

kde $A^H A$ je pozitivně definitní hermitovská matice. Snadno nahlédneme, že v tomto případě metoda sdružených gradientů teoreticky nemůže selhat. Avšak rychlost její konvergence je příliš pomalá, protože závisí na čísle podmíněnosti matice $A^H A$, které je obecně mnohem větší než číslo podmíněnosti matice A (viz [33]).

Pro komplexní symetrickou matici se BCG algoritmus (8.25)–(8.32) redukuje na tvar

$$(8.34) \quad p_0 = r_0 = b - Ax_0,$$

$$\left. \begin{aligned} (8.35) \quad & \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}, \\ (8.36) \quad & x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \\ (8.37) \quad & r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k, \\ (8.38) \quad & \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}, \\ (8.39) \quad & p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots$$

Povšimněme si, že v tomto případě provádíme jen jedno násobení matice vektorem v každém iteračním kroku (ostatní operace jsou „levné“). Navíc stačí v paměti počítače uchovávat jen čtyři vektory b , p , r , x (kromě A). Vektory $A p_k$, $k = 0, 1, \dots$, vyskytující se v (8.35) a (8.37) se mohou v průběhu výpočtu ukládat do b . Oproti poznámce 8.6 jsou koeficienty α_k a β_k obecně komplexní a $r_k^T r_k$ nereprezentuje v komplexním případě skalární součin. Tudíž tato verze BCG algoritmu může opět selhat dvěma způsoby (viz (8.35) a (8.38)). Urychlení konvergence metody BCG pomocí rozličných předpodmiňovacích technik je popsáno v [33].

9. STACIONÁRNÍ ROVNICE PRO POPIS POLOVODIČE

9.1. Klasická formulace

Stacionární chování polovodičů se modeluje například pomocí systému tří nelineárních parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu. Takový systém pro transport nosičů náboje byl poprvé popsán Van Roosbroeckem v roce 1950. Existuje řada modelů, které se liší ve výběru neznámých, různých typů nelinearit, měřítek apod. (viz např. [18], [24], [36]).

V této kapitole budeme vyšetřovat následující systém rovnic (srov. (1.20)) v omezené oblasti $\Omega \in \mathcal{L}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, s lipschitzovskými spojitou hranicí,

$$(9.1) \quad -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u_0) = f + e_1(u_0, u_1) - e_2(u_0, u_2),$$

$$(9.2) \quad -\operatorname{div}(\mu_1 e_1(u_0, u_1) \operatorname{grad} u_1) = k(e_1(u_0, u_1), e_2(u_0, u_2))(1 - e^{u_1+u_2}),$$

$$(9.3) \quad -\operatorname{div}(\mu_2 e_2(u_0, u_2) \operatorname{grad} u_2) = k(e_1(u_0, u_1), e_2(u_0, u_2))(1 - e^{u_1+u_2}),$$

kde $u = (u_0, u_1, u_2)$ je vektor neznámých,

$$(9.4) \quad e_1 = e_1(u_0, u_1) = e^{u_1-u_0}, \quad e_2 = e_2(u_0, u_2) = e^{u_2+u_0},$$

u_0 je elektrostatický potenciál, u_1 a u_2 jsou elektrochemické potenciály děr a elektronů, $f \in L^\infty(\Omega)$ je čistá hustota nábojů ionizovaných příměsí (tzv. doping), k je spojitá kladná funkce, která vyjadřuje rychlost generování děr a elektronů, $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ je dielektrická permitivita, $\mu_1, \mu_2 \in L^\infty(\Omega)$ jsou pohyblivosti děr a elektronů. Necht' navíc

$$\varepsilon \geq m_0, \quad \mu_i \geq m_0, \quad i = 1, 2,$$

pro nějakou kladnou konstantu m_0 .

Podle poznámky 1.1 je $(-\operatorname{grad} u_0)$ elektrické pole odpovídající potenciálu u_0 , který vystupuje v (9.1). Vysoce nelineární rovnice (9.2) a (9.3) vznikly z rovnic kontinuity pro díry a elektrony. Rovnice (9.4) představuje speciální případ Boltzmannovy statistiky, viz (1.19).

Uvažujme následující smíšené (kombinované) okrajové podmínky

$$(9.5) \quad u = \bar{u} \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(9.6) \quad \alpha u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

kde $\Gamma_1 \neq \emptyset$ a Γ_2 jsou relativně otevřené množiny v $\partial\Omega$, $\operatorname{meas}_{d-1}(\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2) = 0$, $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, n je vnější jednotková normála k hranici Γ_2 , $\bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3$ je daná funkce, $\alpha \in L^\infty(\Gamma_2)$ a $\alpha \geq 0$. Hranice Γ_1 odpovídá kovovým kontaktům polovodiče, kde je předepsáno napětí.

Poznámka 9.1. Gröger v práci [24] vyšetřuje model s nelineárními okrajovými podmínkami, kde pohyblivosti děr a elektronů μ_i , $i = 1, 2$, obecně nelineárně závisejí na $\text{grad } u_0$ a $\text{grad } u_i$ takovým způsobem, že odpovídající operátor je silně monotónní.

9.2. Existence slabého řešení

V tomto odstavci dokážeme existenci slabého řešení problému (9.1)–(9.6). K tomu použijeme jednoduchý trik, který je založen na větě o pevném bodě.

Definujme prostor testovacích funkcí

$$V = \{z \in H^1(\Omega) \mid z = 0 \text{ na } \Gamma_1\}$$

a formy

$$(9.7) \quad a(w_0, v_0) = \int_{\Omega} \varepsilon \text{grad } w_0 \cdot \text{grad } v_0 \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha w_0 v_0 \, ds,$$

$$(9.8) \quad \mathcal{A}(y; w, v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \mu_i y_i \text{grad } w_i \cdot \text{grad } v_i \, dx,$$

$$(9.9) \quad \mathcal{F}(y, z; v) = \int_{\Omega} k(y)(1 - e^z)(v_1 + v_2) \, dx,$$

kde $v_0, w_0 \in V$, $y = (y_1, y_2) \in (L^\infty(\Omega))^2$, $v = (v_1, v_2) \in V \times V$, $w = (w_1, w_2) \in V \times V$, $z \in L^\infty(\Omega)$ a „ $\cdot$ “ je standardní skalární součin v $\mathbb{R}^d$.

Vyšetřujeme slabou formulaci problému (9.1)–(9.6): Najít $u = (u_0, u_1, u_2)$ tak, že

$$(9.10) \quad \begin{aligned} u - \bar{u} &\in (V \cap L^\infty(\Omega))^3, \\ a(u_0, v_0) &= \int_{\Omega} (f + e_1 - e_2)v_0 \, dx \quad \forall v_0 \in V, \\ \mathcal{A}(e; \hat{u}, v) &= \mathcal{F}(e, u_1 + u_2; v) \quad \forall v \in V \times V, \end{aligned}$$

kde $e = (e_1, e_2)$ je definováno v (9.4) a

$$\hat{u} = (u_1, u_2).$$

Řešení u problému (9.10) se nazývá *slabé řešení*. Jestliže u je dostatečně hladké, pak není těžké ukázat, že u řeší (9.1)–(9.6) právě tehdy, když řeší (9.10).

Abychom ukázali, že (9.10) má alespoň jedno řešení, položíme

$$(9.11) \quad K = \max_{i=1,2} \|\bar{u}_i\|_{0,\infty}$$

a zvolíme

$$(9.12) \quad M \geq \|\bar{u}_0\|_{0,\infty}$$

tak, aby

$$(9.13) \quad \begin{aligned} f + e^{K-M} - e^{M-K} &\leq 0, \\ f + e^{M-K} - e^{K-M} &\geq 0 \end{aligned}$$

platilo skoro všude.

Dále pro $R > 0$, $x \in \Omega$ a $z \in L^2(\Omega)$ definujeme „ořezávací“ funkci

$$(P_R z)(x) = \begin{cases} -R & \text{pro } z(x) \leq -R, \\ z(x) & \text{pro } -R \leq z(x) \leq R, \\ R & \text{pro } R \leq z(x). \end{cases}$$

Pomocí této funkce definujeme modifikovanou slabou formulaci úlohy (9.1)–(9.6): Najít $u = (u_0, u_1, u_2)$ tak, že

$$(9.14) \quad \begin{aligned} u - \bar{u} &\in V \times V \times V, \\ a(u_0, v_0) &= \int_{\Omega} (f + E_1 - E_2) v_0 \, dx \quad \forall v_0 \in V, \\ \mathcal{A}(E; \hat{u}, v) &= \mathcal{F}(E, P_K u_1 + P_K u_2; v) \quad \forall v \in V \times V, \end{aligned}$$

kde $E = (E_1, E_2)$ je takové, že

$$(9.15) \quad E_1 = E_1(u_0, u_1) = e^{P_K u_1 - P_M u_0}, \quad E_2 = E_2(u_0, u_2) = e^{P_K u_2 + P_M u_0}.$$

Povšimněme si, že prostor $V \times V \times V$ v (9.14) je Hilbertův, zatímco prostor $(V \cap L^\infty(\Omega))^3$ v (9.10) Hilbertův není.

Lemma 9.2. *Každé řešení u problému (9.14) je také řešením problému (9.10).*

D ů k a z . Předpokládejme, že u je řešení (9.14). Lemma dokážeme pomocí vhodné volby testovací funkce (srov. (6.30)) tak, abychom dokázali, že $\|u_0\|_{0,\infty} \leq M$ a $\|u_i\|_{0,\infty} \leq K$ pro $i = 1, 2$.

Nejprve nechť $v_0 = (u_0 - M)^+$. Protože $u_0 - \bar{u}_0 = 0$ na Γ_1 , vidíme pomocí (9.12), že $u_0 - M \leq 0$ na Γ_1 , a tak $v_0 = 0$ na Γ_1 . Podobně jako v důkazu věty 6.8 zjistíme, že $v_0 \in V$. Navíc podle [20], str. 145, máme

$$\text{grad } w^+ = \begin{cases} \text{grad } w & \text{pro } w > 0 \\ 0 & \text{pro } w \leq 0 \end{cases} \quad \forall w \in H^1(\Omega),$$

a tedy

$$\text{grad } u_0 \cdot \text{grad } v_0 = \text{grad } (u_0 - M) \cdot \text{grad } v_0 = \text{grad } (u_0 - M)^+ \cdot \text{grad } v_0 = \|\text{grad } v_0\|^2.$$

Odtud, z (9.14) a (9.15) obdržíme

$$(9.16) \quad \int_{\Omega} \varepsilon \|\text{grad } v_0\|^2 \, dx + \int_{\Gamma_2} \alpha u_0 v_0 \, ds - \int_{\Omega} (f + e^{P_K u_1 - P_M u_0} - e^{P_K u_2 + P_M u_0}) v_0 \, dx = 0.$$

Protože $v_0 = (u_0 - M)^+$, vidíme, že pokud $u_0(x) \geq M$ (> 0) pro nějaké $x \in \overline{\Omega}$, pak je

$$\begin{aligned}\alpha(x)u_0(x)v_0(x) &\geq 0, \\ e^{P_K u_1(x) - P_M u_0(x)}v_0(x) &\leq e^{K-M}v_0(x), \\ e^{P_K u_2(x) + P_M u_0(x)}v_0(x) &\geq e^{-K+M}v_0(x),\end{aligned}$$

v opačném případě jestliže $u_0(x) < M$, pak $v_0(x) = 0$, a proto

$$\begin{aligned}\alpha(x)u_0(x)v_0(x) &= 0, \\ e^{P_K u_1(x) - P_M u_0(x)}v_0(x) &= 0 = e^{K-M}v_0(x), \\ e^{P_K u_2(x) + P_M u_0(x)}v_0(x) &= 0 = e^{-K+M}v_0(x).\end{aligned}$$

Tudíž $\alpha u_0 v_0 \geq 0$ s. v. na Γ_2 , hraniční integrál v (9.16) je nezáporný a podle (9.13) platí

$$(f + e^{P_K u_1 - P_M u_0} - e^{P_K u_2 + P_M u_0})v_0 \leq (f + e^{K-M} - e^{-K+M})v_0 \leq 0.$$

Z (9.16) tedy máme

$$m_0 \int_{\Omega} \|\text{grad } v_0\|^2 dx \leq 0,$$

z čehož vyplývá, že $\text{grad } v_0 = 0$, a tedy $v_0 = 0$, protože $v_0 \in V$. Jinými slovy, $u_0 \leq M$. Podobně dostaneme, že $u_0 \geq -M$ pro testovací funkci $v_0 = (u_0 + M)^-$ pomocí vztahu (9.13).

Za druhé nechť $v_i = (u_i - K)^+$ pro $i = 1, 2$. Jestliže $u_i(x) - \overline{u}_i(x) = 0$, pak z (9.11) vyplývá, že $u_i(x) - K \leq 0$, a proto $v_i(x) = 0$. Tedy opět zjistíme, že $v_i \in V$ a také $\text{grad } u_i \cdot \text{grad } v_i = \|\text{grad } v_i\|^2$. Podle (9.14), (9.8) a (9.9) dostaneme

$$(9.17) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\mu_i E_i \|\text{grad } v_i\|^2 - k(E)(1 - e^{P_K u_1 + P_K u_2})v_i) dx = 0.$$

Jelikož k je kladná funkce a $v_i = (u_i - K)^+$, platí

$$k(E)(1 - e^{P_K u_1 + P_K u_2})v_i \leq 0$$

a zřejmě

$$\mu_i E_i \geq m_0 e^{-K-M} > 0.$$

Z (9.17) tedy vyplývá

$$(9.18) \quad \sum_{i=1}^2 m_0 e^{-K-M} \int_{\Omega} \|\text{grad } v_i\|^2 dx \leq 0,$$

což opět implikuje, že $v_i = 0$ pro $i = 1, 2$, tj. $u_i \leq K$ pro $i = 1, 2$. Podobně dostaneme, že $u_i \geq -K$ pro testovací funkce $v_i = (u_i + K)^-$, $i = 1, 2$. $\square$

Dále uvedeme jisté zobecnění Brouwerovy věty 4.19 o pevném bodě, které se někdy nazývá Schauderova věta.

Věta 9.3. *Nechť B je neprázdná konvexní a kompaktní podmnožina Banachova prostoru a necht' zobrazení $S : B \rightarrow B$ je spojitě. Pak existuje $x \in B$ tak, že $Sx = x$.*

Důkaz je uveden v [61].

Věta 9.4. *Problém (9.10) má alespoň jedno řešení.*

D ů k a z . Nejprve převedeme problém existence řešení u na problém hledání pevného bodu, a pak aplikujeme větu 9.3 podobně jako v [24].

Položme $H = (L^2(\Omega))^3$ a necht' $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in H$ je dáno. Definujme $\tilde{E} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2) \in (L^\infty(\Omega))^2$ pomocí

$$(9.19) \quad \tilde{E}_1 = e^{P_K \tilde{u}_1 - P_M \tilde{u}_0}, \quad \tilde{E}_2 = e^{P_K \tilde{u}_2 + P_M \tilde{u}_0}$$

a stanovme $u_0 \in H^1(\Omega)$ jako jediné řešení lineárního problému

$$(9.20) \quad \begin{aligned} u_0 - \bar{u}_0 &\in V, \\ a(u_0, v_0) &= \int_{\Omega} (f + \tilde{E}_1 - \tilde{E}_2) v_0 \, dx \quad \forall v_0 \in V. \end{aligned}$$

Dále určíme $(u_1, u_2) \in (H^1(\Omega))^2$ jako jediné řešení jiného lineárního problému

$$(9.21) \quad \begin{aligned} u_i - \bar{u}_i &\in V \quad \text{pro } i = 1, 2, \\ \mathcal{A}(\tilde{E}; u_1, u_2, v) &= \mathcal{F}(\tilde{E}, P_K \tilde{u}_1 + P_K \tilde{u}_2; v) \quad \forall v \in V \times V. \end{aligned}$$

Nyní definujme operátor $S : H \rightarrow H$ pomocí vztahu

$$S\tilde{u} = u,$$

kde $u = (u_0, u_1, u_2)$. Jestliže toto u je pevný bod zobrazení S , potom snadno nahlédneme, že u řeší problém (9.14).

Nyní ověříme, že předpoklady věty 9.3 jsou splněny. Pomocí (9.20) a (9.21) dokážeme, že $S : H \rightarrow H$ je spojitě. Nejprve ukážeme, že zobrazení

$$(9.22) \quad \tilde{u} \in H \mapsto u_0 \in H^1(\Omega),$$

kté je dáno problémem (9.20), je lipschitzovsky spojitě.

Necht' tedy $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ a $\tilde{u}' = (\tilde{u}'_0, \tilde{u}'_1, \tilde{u}'_2)$ z H jsou dány. Označme $u_0, u'_0 \in H^1(\Omega)$ jejich obrazy. Necht' $\tilde{E}'_1$ a $\tilde{E}'_2$ odpovídají $\tilde{u}'$ jako v (9.19). Pak pomocí Friedrichsovy nerovnosti, (9.7) a (9.20) dostaneme

$$(9.23) \quad \begin{aligned} C\|u_0 - u'_0\|_1^2 &\leq \int_{\Omega} \varepsilon \|\text{grad } (u_0 - u'_0)\|^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \varepsilon \text{grad } (u_0 - u'_0) \cdot \text{grad } (u_0 - u'_0) \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \alpha(u_0 - u'_0)(u_0 - u'_0) \, ds \\ &= a(u_0, u_0 - u'_0) - a(u'_0, u_0 - u'_0) \\ &= \int_{\Omega} (\tilde{E}_1 - \tilde{E}_2 - \tilde{E}'_1 + \tilde{E}'_2)(u_0 - u'_0) \, dx \\ &\leq (\|\tilde{E}_1 - \tilde{E}'_1\|_0 + \|\tilde{E}_2 - \tilde{E}'_2\|_0) \|u_0 - u'_0\|_1. \end{aligned}$$

Zřejmě

$$(9.24) \quad \zeta, \xi \in [-M, M] \implies |e^\zeta - e^\xi| \leq e^M |\zeta - \xi|.$$

Tudíž podle (9.19) a (9.24) máme

$$(9.25) \quad \begin{aligned} \|\tilde{E}_1 - \tilde{E}'_1\|_0 &= \|e^{P_K \tilde{u}_1} e^{-P_M \tilde{u}_0} - e^{P_K \tilde{u}'_1} e^{-P_M \tilde{u}'_0}\|_0 \\ &= \|e^{P_K \tilde{u}_1} (e^{-P_M \tilde{u}_0} - e^{-P_M \tilde{u}'_0}) + (e^{P_K \tilde{u}_1} - e^{P_K \tilde{u}'_1}) e^{-P_M \tilde{u}'_0}\|_0 \\ &\leq e^K \|e^{-P_M \tilde{u}_0} - e^{-P_M \tilde{u}'_0}\|_0 + e^M \|e^{P_K \tilde{u}_1} - e^{P_K \tilde{u}'_1}\|_0 \\ &\leq e^K e^M (\| -P_M \tilde{u}_0 + P_M \tilde{u}'_0\|_0 + \|P_K \tilde{u}_1 - P_K \tilde{u}'_1\|_0) \\ &\leq e^{K+M} (\|\tilde{u}_0 - \tilde{u}'_0\|_0 + \|\tilde{u}_1 - \tilde{u}'_1\|_0), \end{aligned}$$

kde poslední nerovnost platí, protože P_K je projekce. Podobně můžeme odhadnout člen $\|\tilde{E}_2 - \tilde{E}'_2\|_0$. Tedy podle (9.23) a (9.25) dostaneme

$$C\|u_0 - u'_0\|_1 \leq 4e^{K+M} \|\tilde{u} - \tilde{u}'\|_0,$$

což znamená, že zobrazení (9.22) je lipschitzovsky spojitý.

Podobným způsobem můžeme pro lineární problém (9.21) dokázat, že

$$\|u_i - u'_i\|_1 \leq C \|\tilde{u} - \tilde{u}'\|_0, \quad i = 1, 2.$$

Operátor $S : H \rightarrow H$ je tedy spojitý.

Dále podle (9.20) platí

$$\begin{aligned} C\|u_0 - \bar{u}_0\|_1^2 &\leq a(u_0 - \bar{u}_0, u_0 - \bar{u}_0) \\ &= \int_{\Omega} (f + \tilde{E}_1 - \tilde{E}_2)(u_0 - \bar{u}_0) \, dx - a(\bar{u}_0, u_0 - \bar{u}_0) \\ &\leq C'(\|f\|_{0,\infty} + 2e^{K+M} + \|\bar{u}_0\|_1) \|u_0 - \bar{u}_0\|_1 \end{aligned}$$

a podobně pomocí (9.8), Friedrichsovy nerovnosti (2.32) a (9.21)

$$\begin{aligned} Ce^{-K-M} \sum_{i=1}^2 \|u_i - \bar{u}_i\|_1^2 &\leq \mathcal{A}(\tilde{E}; u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2, u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2) \\ &= \mathcal{F}(\tilde{E}, P_K \tilde{u}_1 + P_K \tilde{u}_2; u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2) - \mathcal{A}(\tilde{E}; \bar{u}_1, \bar{u}_2, u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2) \\ &\leq C_1(1 + e^{2K}) \sum_{i=1}^2 \|u_i - \bar{u}_i\|_1 + C_2 \sum_{i=1}^2 e^{K+M} \|\bar{u}_i\|_1 \|u_i - \bar{u}_i\|_1, \end{aligned}$$

kde C_1 závisí na maximu funkce k na čtverci $[0, e^{K+M}] \times [0, e^{K+M}]$. Odtud vidíme, že norma $\|u\|_1$ je ohraničena nezávisle na $\tilde{u}$. A tak S zobrazuje celý prostor H do uzavřené koule v $(H^1(\Omega))^3$. Tato koule je zřejmě neprázdná a konvexní a z Rellichovy věty 2.9 plyne, že je kompaktní v $H = (L^2(\Omega))^3$. Podle

věty 9.3 má zobrazení S pevný bod, který je řešením problému (9.14). Podle lemmatu 9.2 toto řešení též splňuje rovnice (9.10). $\square$

9.3. Jednoznačnost a nejednoznačnost slabého řešení

Opět budeme vyšetřovat problém (9.10) za předpokladů uvedených v paragrafu 9.1. Následující věta zaručuje jednoznačnost slabého řešení za předpokladu, že řídicí síly pro toky jsou nulové na hranici Γ_1 (viz [24]). Funkce $\bar{u}_0$, která určuje okrajové podmínky pro elektrostatický potenciál u_0 na hranici Γ_1 , může být libovolná.

Věta 9.5. *Nechť*

$$(9.26) \quad \text{grad } \bar{u}_1 = \text{grad } \bar{u}_2 = 0 \quad a \quad \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = 0.$$

Pak má problém (9.10) jediné řešení $u = (u_0, u_1, u_2)$. Toto řešení splňuje vztah $u_i = \bar{u}_i$ pro $i = 1, 2$.

D ů k a z . Budiž u slabé řešení (9.10), viz větu 9.4. Nechť dále $v_i = u_i - \bar{u}_i$ pro $i = 1, 2$. Pak z (9.8), (9.9) a (9.26) vyplývá

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}(e; u_1, u_2, u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2) - \mathcal{F}(e; u_1 + u_2, u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \mu_i e_i \text{grad } u_i \cdot \text{grad } (u_i - \bar{u}_i) - k(e)(1 - e^{u_1+u_2})(u_1 - \bar{u}_1 + u_2 - \bar{u}_2) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \mu_i e_i \|\text{grad } u_i\|^2 - k(e)(1 - e^{u_1+u_2})(u_1 + u_2) \right) dx. \end{aligned}$$

Obě části integrandu jsou nezáporné, protože $(1 - e^{\xi})\xi \leq 0$ pro každé $\xi \in \mathbb{R}^1$. Tudíž $\text{grad } u_i = 0$ pro $i = 1, 2$, a tak dostaneme $u_i = \bar{u}_i$ pro $i = 1, 2$.

Nakonec ukážeme, že existuje nejvýše jedno u_0 , které splňuje nelineární problém: Najít $u_0 \in H^1(\Omega)$ tak, aby

$$(9.27) \quad \begin{aligned} u_0 - \bar{u}_0 &\in V \cap L^\infty(\Omega), \\ a(u_0, v_0) &= \int_{\Omega} (f + e^{\bar{u}_1 - u_0} - e^{\bar{u}_2 + u_0}) v_0 dx \quad \forall v_0 \in V. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že dvě řešení u_0 a u'_0 splňují (9.27). Pro každé $y \in \mathbb{R}^1$ jsou funkce $\xi \mapsto -e^{y-\xi}$ a $\xi \mapsto e^{y+\xi}$ rostoucí, a tedy (srov. (4.10))

$$\begin{aligned} (-e^{y-\xi_1} + e^{y-\xi_2})(\xi_1 - \xi_2) &\geq 0 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1, \\ (e^{y+\xi_1} - e^{y+\xi_2})(\xi_1 - \xi_2) &\geq 0 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Odtud, z (9.27) pro $v_0 = u_0 - u'_0 \in V$ a z eliptičnosti bilineární formy $a(\cdot, \cdot)$ máme

$$(9.28) \quad \begin{aligned} 0 &= a(u_0 - u'_0, u_0 - u'_0) + \int_{\Omega} (-e^{\bar{u}_1 - u_0} + e^{\bar{u}_1 - u'_0} + e^{\bar{u}_2 + u_0} - e^{\bar{u}_2 + u'_0})(u_0 - u'_0) dx \\ &\geq a(u_0 - u'_0, u_0 - u'_0) \geq C \|u_0 - u'_0\|_1^2. \end{aligned}$$

Tedy $u_0 = u'_0$. $\square$

Další věty o jednoznačnosti řešení jsou uvedeny např. v [24], [36]. Poznamenejme ale, že rovnice popisující polovodiče mohou mít obecně i více řešení (viz [36], str. 43) a že některé polovodičové součástky (např. tyristor) připouštějí několik různých stacionárních stavů pro jisté pevné okrajové podmínky.

9.4. Aproximace metodou konečných prvků

Nechť $\mathcal{T}_h$ je triangulace polyedrické oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, a nechť

$$X_h = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

kde P_K je prostor polynomů definovaných na K takový, že $P_K \supset P_1(K)$.

Funkce $\bar{u} \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^3$ nemusí být podle [33], par. 3.3, spojitá pro $d > 1$. Předpokládejme proto navíc, že $\bar{u} \in (C(\bar{\Omega}))^3$, a položíme

$$\bar{u}_h = \pi_h \bar{u},$$

kde $\pi_h \bar{u}$ je $(X_h)^3$ -interpolace funkce $\bar{u}$.

Definujeme prostor testovacích funkcí

$$V_h = V \cap X_h.$$

Pak můžeme formulovat aproximaci problému (9.10) pomocí metody konečných prvků následujícím způsobem: Najít $u_h = (u_{0h}, u_{1h}, u_{2h})$ tak, že

$$(9.29) \quad \begin{aligned} u_h - \bar{u}_h &\in V_h \times V_h \times V_h, \\ a(u_{0h}, v_{0h}) &= \int_{\Omega} (f + e_{1h} - e_{2h}) v_{0h} \, dx \quad \forall v_{0h} \in V_h, \\ \mathcal{A}(e_h; \hat{u}_h, v_h) &= \mathcal{F}(e_h, u_{1h} + u_{2h}; v_h) \quad \forall v_h \in V_h \times V_h, \end{aligned}$$

kde $\hat{u}_h = (u_{1h}, u_{2h})$ a

$$e_h = (e_{1h}, e_{2h}) = (e^{u_{1h} - u_{0h}}, e^{u_{2h} + u_{0h}}).$$

Poznámka 9.6. Bohužel nelze dokázat existenci u_h podobným způsobem jako existenci u , protože testovací funkce (srov. důkaz lemmatu 9.2)

$$v_{0h} = (u_{0h} - M)^+, \quad v_{ih} = (u_{ih} - K)^+, \quad i = 1, 2,$$

obecně nepatří do V_h . Pokud bychom uvažovali předchozí vztahy jen v uzlových bodech triangulace a v_{0h} dodefinovali v $\bar{\Omega}$ tak, aby $v_{0h} \in V_h$, pak bychom zase obecně měli potíže se splněním rovnice, která je analogická rovnici (9.16).

Abychom zkonstruovali přibližné řešení, které splňuje rovnice (9.29), můžeme postupovat následovně:

Nechť $H_h = (X_h)^3$ a nechť počáteční aproximace $\tilde{u}_h = (\tilde{u}_{0h}, \tilde{u}_{1h}, \tilde{u}_{2h}) \in H_h$ jsou dány. Položíme $\tilde{e}_h = (\tilde{e}_{1h}, \tilde{e}_{2h})$, kde

$$\tilde{e}_{1h} = e^{\tilde{u}_{1h} - \tilde{u}_{0h}}, \quad \tilde{e}_{2h} = e^{\tilde{u}_{2h} + \tilde{u}_{0h}},$$

a definujeme $u_{0h} \in X_h$ jako jediné řešení lineárního problému

$$(9.30) \quad \begin{aligned} u_{0h} - \bar{u}_{0h} &\in V_h, \\ a(u_{0h}, v_{0h}) &= \int_{\Omega} (f + \tilde{e}_{1h} - \tilde{e}_{2h}) v_{0h} \, dx \quad \forall v_{0h} \in V_h. \end{aligned}$$

Dále definujeme $(u_{1h}, u_{2h}) \in X_h \times X_h$ jako jediné řešení dalšího lineárního problému

$$(9.31) \quad \begin{aligned} u_{ih} - \bar{u}_{ih} &\in V_h && \text{pro } i = 1, 2, \\ \mathcal{A}(\tilde{e}_h; u_{1h}, u_{2h}, v_h) &= \mathcal{F}(\tilde{e}_h, \tilde{u}_{1h} + \tilde{u}_{2h}; v_h) \quad \forall v_h \in V_h \times V_h. \end{aligned}$$

Nyní definujeme zobrazení $S_h : H_h \rightarrow H_h$ vztahem

$$S_h \tilde{u}_h = u_h,$$

kde $u_h = (u_{0h}, u_{1h}, u_{2h})$ je určeno (9.30) a (9.31). Pokud má toto zobrazení S_h pevný bod, pak je tento bod zřejmě řešením (9.29).

Existence řešení přibližného problému, který je podobný (9.29), je dokázána v [68] za podmínky, že žádný úhel v triangulaci není tupý. Taková podmínka implikuje diskretní princip maxima. Jistá konvergenční analýza je provedena v [3.6], par. 5.3.

Věta 9.7. *Nechť $\text{grad } \bar{u}_{1h} = \text{grad } \bar{u}_{2h} = 0$ a $\bar{u}_{1h} + \bar{u}_{2h} = 0$. Pak má problém (9.29) nejvýše jedno řešení $u_h = (u_{0h}, u_{1h}, u_{2h})$ a toto řešení, pokud existuje, splňuje vztah $u_{ih} = \bar{u}_{ih}$ pro $i = 1, 2$.*

D ů k a z . Předpokládáme, že u_h řeší (9.29). Podobně jako v důkazu věty 9.5 shledáme, že

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}(e_h; u_{1h}, u_{2h}, u_{1h} - \bar{u}_{1h}, u_{2h} - \bar{u}_{2h}) - \mathcal{F}(e_h; u_{1h} + u_{2h}, u_{1h} - \bar{u}_{1h}, u_{2h} - \bar{u}_{2h}) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 \mu_i e_{ih} \|\text{grad } u_{ih}\|^2 - k(e_h)(1 - e^{u_{1h} + u_{2h}})(u_{1h} + u_{2h}) \right) dx. \end{aligned}$$

Protože obě části integrandu jsou nezáporné, platí $\text{grad } u_{ih} = 0$ pro $i = 1, 2$. Tedy $u_{ih} = \bar{u}_{ih}$ pro $i = 1, 2$.

Uvažujme problém: Najít $u_{0h} \in X_h$ tak, že $u_{0h} - \bar{u}_{0h} \in V_h$ a

$$a(u_{0h}, v_{0h}) = \int_{\Omega} (f + e^{\bar{u}_{1h} - u_{0h}} - e^{\bar{u}_{2h} + u_{0h}}) v_{0h} \, dx \quad \forall v_{0h} \in V_h.$$

Podobně jako v (9.28) můžeme ukázat, že existuje nejvýše jediné u_{0h} . $\square$

Poznámka 9.8. Jednoznačnost přibližného řešení jiného (ale podobného) schématu je dokázána v [68].

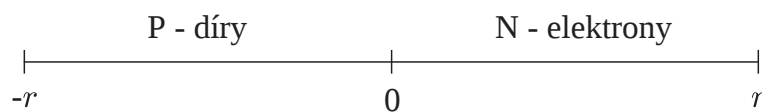
Příklad 9.9. Uvažujme soustavu (9.1)–(9.3) v případě $d = 1$, $\Omega = (-r, r)$ pro $r = 0.001$, $\varepsilon = 10^{-10}$, $k = 0$ a konstantní μ_i . Potom platí

$$(9.32) \quad \begin{aligned} -\varepsilon u_0'' &= f + e_1 - e_2, \\ (e_1 u_1')' &= 0, \\ (e_2 u_2')' &= 0, \end{aligned}$$

kde e_1 a e_2 jsou definovány v (9.4). Necht' např. $f(x) = -3 \operatorname{sign}(x)/2$ a předepíšme následující Dirichletovy okrajové podmínky

$$(9.33) \quad \begin{aligned} u_0(-r) &= 1, & u_0(r) &= -1, \\ u_1(-r) &= 0.5, & u_1(r) &= 0, \\ u_2(-r) &= 0, & u_2(r) &= 0.5. \end{aligned}$$

Okrajový problém (9.32)–(9.33) slouží jako jednoduchý model jednorozměrné PN-diody z obr. 1 (podobnou úlohu lze nalézt např. v [45], str. 833). K řešení se používá metoda z poznámky 9.6. Funkce u_0 se značně mění v blízkosti přechodu P–N, a proto je zde zapotřebí triangulaci patřičně zjemňovat.



Obr. 9.1

Poznámka 9.10. Maticová forma problému (9.29) vyžaduje počítat integrály typu

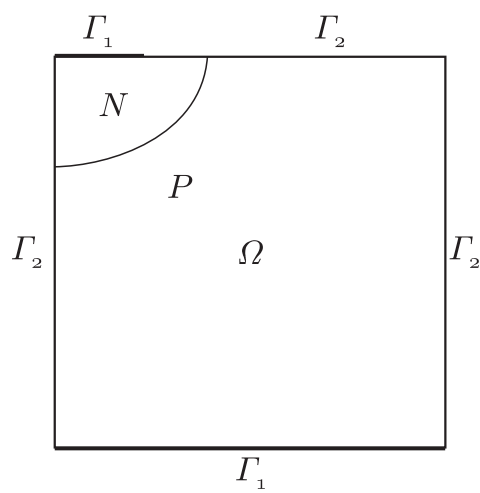
$$(9.34) \quad \int_K e^{p(x)} dx.$$

Je-li $d = 2$ a p je lineární funkce na trojúhelníku $K \in \mathcal{T}_h$, pak můžeme použít užitečnou formulu z [46]. Označme p_1, p_2 a p_3 hodnoty p ve třech vrcholech K . Jestliže například $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$, pak po jistém výpočtu dostaneme

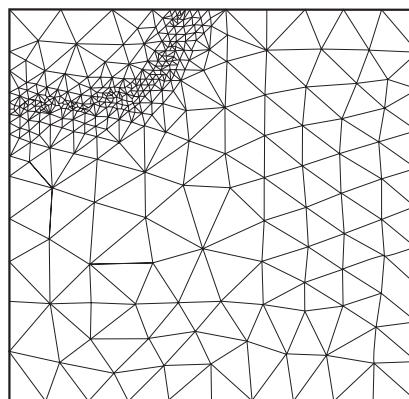
$$\int_K e^{p(x)} dx = \frac{2 \operatorname{meas} K}{p_2 - p_1} \left(\frac{e^{p_3} - e^{p_2}}{p_3 - p_2} - \frac{e^{p_3} - e^{p_1}}{p_3 - p_1} \right).$$

Žádná numerická integrace tedy není zapotřebí k výpočtu integrálu (9.34).

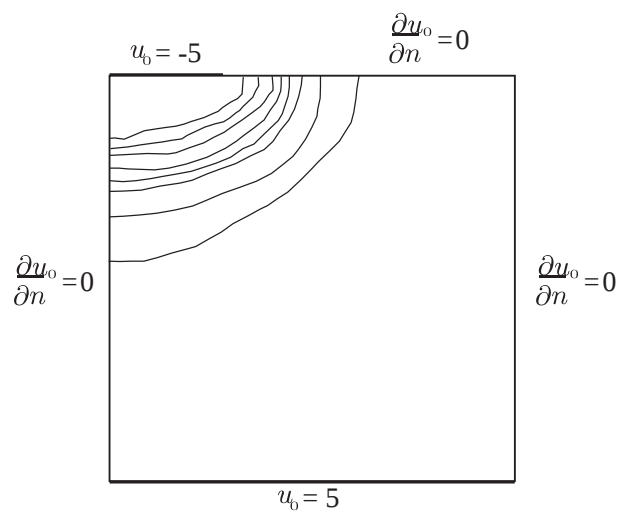
Příklad 9.11. Necht' Ω je čtverec. Pozice množin Γ_1 a Γ_2 je znázorněna na obr. 9.2. Protože permitivita ε vystupující v (9.1) je velice malá (řádově 10^{-10}), je rovnice (9.1) málo „eliptická“ a počítačová implementace problému (9.1)–(9.6) je pak obtížná. Obr. 9.3 znázorňuje použitou triangulaci, která respektuje přechod P–N. Na obr. 9.4 vidíme vrstevnice elektrostatického potenciálu u_0 dvojrozměrného problému počítaného M. Pospíškem.



Obr. 9.2



Obr. 9.3



Obr. 9.4

LITERATURA

- [1] S. Adjerid, J. E. Flaherty, Y. J. Wang: *A posteriori error estimation with finite element methods of lines for one-dimensional parabolic systems*. Numer. Math. 65 (1993), 1–21.
- [2] S. Agmon: *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1965.
- [3] O. Axelsson, V. A. Barker: *Finite Element Solution of Boundary Value Problems*. Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [4] R. E. Bank, D. J. Rose: *Parameter selection for Newton-like methods applicable to nonlinear partial differential equations*. SIAM J. Numer. Anal. 17 (1980), 806–822.
- [5] R. E. Bank, D. J. Rose: *Some error estimates for the box method*. SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987), 777–787.
- [6] R. E. Bank, A. Weiser: *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Math. Comp. 44 (1985), 283–301.
- [7] J. Céa: *Optimisation, théorie et algorithmes*. Dunod, Paris, 1971.
- [8] P. G. Ciarlet, J. L. Lions (eds.): *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II Finite Element Methods*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [9] E. A. Coddington, N. Levinson: *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [10] J. E. Dennis, J. J. Moré: *Quasi-Newton methods, motivation and theory*. SIAM Rev. 19 (1977), 46–89.
- [11] P. Doktor: *On the density of smooth functions in certain subspaces of Sobolev spaces*. Comment. Math. Univ. Carolin. 14 (1973), 609–622.
- [12] I. Ekeland, R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [13] M. Feistauer: *On the finite element approximation of functions with noninteger derivatives*. Numer. Funct. Anal. Optim. 10 (1989), 91–110.
- [14] M. Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [15] M. Feistauer, H. Kalis, M. Rokyta: *Mathematical modelling of an electrolysis process*. Comment. Math. Univ. Carolin. 30 (1989), 465–477.
- [16] J. Franců: *Monotone operators. A survey directed to applications to differential equations*. Appl. Math. 35 (1990), 257–301.
- [17] S. Fučík, A. Kufner: *Nonlinear Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 1980.
- [18] H. Gajewski: *On uniqueness and stability of steady-state carrier distributions in semiconductors*. In: Proc. Conf. EQUADIFF 6 (eds. J. Vosmanský and M. Zlámal). Springer-Verlag, Berlin, 1986, 209–214.
- [19] H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [20] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [21] V. Girault, P. A. Raviart: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [22] R. Glowinski: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [23] R. Glowinski, A. Marrocco: *Analyse numérique du champ magnetique d'un alternateur par elements finis et sur-relaxation ponctuelle non lineaire*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 3 (1974), 55–85.
- [24] K. Gröger: *On steady-state carrier distributions in semiconductor devices*. Apl. Mat. 32 (1987), 49–56.
- [25] J. Haslinger: *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

- [26] J. Haslinger, I. Hlaváček: *Convergence of a finite element method based on the dual variational formulation*. Apl. Mat. 21 (1976), 43–65.
- [27] I. Hlaváček, M. Křížek, J. Malý: *On Galerkin approximations of quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type*. J. Math. Anal. Appl. 184 (1994), 168–189.
- [28] V. Jarník: *Diferenciální počet, 1. díl*. 6. vyd. Academia, Praha, 1974.
- [29] C. Johnson: *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [30] J. Kadlec: *On the regularity of the solution of the Poisson problem on a domain with boundary locally similar to the boundary of a convex open set*. Czechoslovak Math. J. 14 (1964), 386–393.
- [31] M. Křížek: *Conforming equilibrium finite element methods for some elliptic plane problems*. RAIRO Anal. Numér. 17 (1983), 35–65.
- [32] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.
- [33] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *Mathematical and Numerical Modelling in Electrical Engineering: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [34] A. Kufner, O. John, S. Fučík: *Function Spaces*. Academia, Prague, 1977.
- [35] J. L. Lions, E. Magenes: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, 1968.
- [36] P. A. Markowich: *The Stationary Semiconductor Device Equations*. Springer-Verlag, Wien, 1986.
- [37] V. G. Mazja: *Prostranstva S. L. Soboleva*. Izd. Leningrad. Univ., Leningrad, 1985.
- [38] Z. Milka: *Finite element solution of a stationary heat conduction equation with the radiation boundary condition*. Appl. Math. 38 (1993), 67–79.
- [39] M. S. Mock: *Analysis of Mathematical Models of Semiconductor Devices*. Boole Press, Dublin, 1983.
- [40] K. Najzar, J. Zítko: *Numerické metody funkcionální analýzy I, II*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984.
- [41] J. Nečas: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Academia, Praha, 1967.
- [42] J. Nečas: *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Teubner, Leipzig, 1983.
- [43] J. Nečas, I. Hlaváček: *Úvod do matematické teorie pružných a pružně plastických těles*. SNTL, Praha, 1983.
- [44] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt: *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York, 1970.
- [45] S. J. Polak, C. den Heijer, W. H. A. Schilders, P. Markowich: *Semiconductor device modelling from the numerical point of view*. Internat. J. Numer. Methods Engrg. 24 (1987), 763–838.
- [46] M. Pospíšek, K. Segeth, P. Šilhán: *Numerical modeling of semiconductor devices*. In: Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 59. János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1991, 319–328.
- [47] A. Ralston: *Základy numerické matematiky*. Academia, Praha, 1973.
- [48] K. Rektorys: *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*. SNTL, Praha, 1985.
- [49] K. Rektorys et al.: *Přehled užití matematiky*. 6. přepracované vyd. Prometheus, Praha, 1995.
- [50] W. Rudin: *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia, Praha, 1977.
- [51] K. Segeth: *A posteriori error estimates for parabolic differential systems solved by the finite element method of lines*. Appl. Math. 39 (1994), 415–443.
- [52] K. Segeth: *Je bilanční metoda lepší než metoda konečných prvků?* In: Programy a algoritmy numerické matematiky 8. (Sborník semináře, Janov n. N. 1996.) Matematický ústav AV ČR, Praha, 1996, 184–193.
- [53] K. Segeth: *Numerický software I*. Karolinum, Praha, 1998.
- [54] J. Segethová: *Základy numerické matematiky*. Karolinum, Praha, 1998.
- [55] S. Selberherr: *Analysis and Simulation of Semiconductor Devices*. Springer-Verlag, Wien, 1984.
- [56] G. Strang: *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, 1986.
- [57] J. L. Synge: *The Hypercircle in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
- [58] B. Szabó, I. Babuška: *Finite Element Analysis*. J. Wiley & Sons, New York, 1991.
- [59] S. M. Sze: *Physics of Semiconductor Devices*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [60] A. E. Taylor: *Úvod do funkcionální analýzy*. Academia, Praha, 1973.
- [61] A. N. Tichonov: *Ein Fixpunktsatz*. Math. Ann. 111 (1935), 767–776.

- [62] R. S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [63] H. K. Versteeg, W. Malalasekera: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1995.
- [64] E. Vitásek: *Numerické metody*. SNTL, Praha, 1987.
- [65] E. Vitásek: *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Academia, Praha, 1994.
- [66] J. S. van Welij: *Basis functions matching tangential components on element edges*. In: Proc. 2nd International Conference on Simulation of Semiconductor Devices and Processes. Pineridge Press, Swansea, 1986.
- [67] K. Yosida: *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [68] M. Zlámal: *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices I*. Math. Comp. 49 (1986), 27-43.
- [69] A. Ženíšek: *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*. Academic Press, London, 1990.

VĚCNÝ REJSTRÍK

- algoritmus Gummelův 130
- aproximace Galerkinova 53, 60, 82, 83, 90
 - Galerkinova semidiskrétní 95
- aritmetika komplexní 110
- báze 34, 41
 - hierarchická 152
 - Schauderova 60
- bod hromadný 83, 90
 - pevný 47, 83, 118, 120, 122
 - uzlový 29, 30, 96, 97, 121
- buňka 135, 137
- čára indukční 50
- číslo komplexně sdružené 18, 22, 106
 - komplexní 17
 - podmíněnosti 98
 - vlastní 98, 99, 101
- derivace časová 94, 101
 - druhá směrová 67
 - klasická 21, 22
 - směrová 63, 64, 66
 - zobecněná 21, 22, 24, 37
- diference konečná centrální 132
- diferenciál Fréchetův (totální) 63, 64, 67
 - Gâteauxův 63–65, 67, 73, 75, 81
- dimenze 21, 99
- diskretizace 96
 - časová 104, 167
 - prostorová 32, 96
- divergence 12, 135
- doplňěk ortogonální 39
- dotace 126, 130
- ekvivalence norem 60
- elektromagnet 49
- elektromotor 50
- eliminace Gaussova 30, 110
- eliptičnost bilineární formy 99, 120
- energie střední kinetická 10
- estimátor chyby 147
- existence 81, 83
 - řešení 10, 31
 - slabého řešení 75, 95, 115
- forma bilineární 18, 20, 31, 34
 - bilineární symetrická 40, 66
 - hermitovská 19
 - lineární 18, 40, 109
 - lineární spojitá 66
 - sesquilineární 18, 109
 - sesquilineární spojitá 19
 - spojitá 18
 - symetrická 20
 - V-eliptická 34
 - V-eliptická bilineární 46
 - V-eliptická bilineární spojitá 63
- formulace klasická 65, 76, 96, 106, 114
 - slabá 10, 26, 30, 31, 51, 78, 86, 94, 115, 131
 - slabá modifikovaná 116
 - variační 10, 26, 39
 - variační duální 40
 - zobecněná 10
- formule Greenova 14
- frekvence úhlová 108
- funkce abstraktní 94
 - bázová 26, 27, 34, 97, 110
 - bázová Courantova 28
 - bázová exponenciální 133
 - bublinová 152
 - časově nezávislá 13, 14
 - časově periodická 106
 - časově proměnná 108
 - darbouxovská 10
 - elektrické vodivosti 109
 - emisivity relativní 65
 - exponenciální 47
 - hölderovsky spojitá 24
 - kladná 117
 - komplexní 18, 106
 - komplexní vektorová 107
 - konstantní 42
 - konstantní po částech 37
 - konvexní 74
 - lipschitzovská 73
 - lipschitzovsky spojitá 21, 52, 75, 78
 - maticová 50
 - měřitelná 78
 - neklesající 46, 50, 52, 75, 79
 - ohraničená 78
 - ohraničená měřitelná 76
 - ořezávací 116
 - po částech polynomiální 32, 95
 - polovodičové součástky 125, 127
 - polynomiální 32
 - primitivní 73
 - proudová 50
 - reálná 18, 19, 99, 108
 - reálná hladká 84

- rekombinační 126, 130
- rekombinační plošná 129
- rostoucí 77, 120
- ryze konvexní 74
- skalární 12, 14, 107, 108
- skalární spojitá 49
- spojitě diferencovatelná 52
- testovací 86, 90, 103, 116, 117, 121, 131
- vektorová 14, 107
- funkcionál doplňkové energie 40
 - energetický 20
 - gâteauxovsky diferencovatelný 68
 - koercivní 68, 75
 - konvexní 68, 73, 75
 - kvadratický 19, 39, 40, 53, 63
 - lineární 18, 33
 - lineární spojitý 18, 19, 31, 46, 47, 51, 54, 63, 109
 - nekonvexní 80
 - nekvadratický 63
 - nekvadratický ryze konvexní 53
 - opěrný 75
 - potenciální energie 66
 - reálný 80
 - ryze konvexní 67, 68, 74, 75
 - slabě zdola polospojité 75
 - spojité 67–69
- gradient 14, 22, 135
- hranice 20
 - lipschitzovsky spojitá 21, 32, 33
- hranol trojboký 27, 95
- hustota 14, 80, 93
 - děr proudová 15, 125
 - elektronů proudová 15, 125
 - ionizovaných příměsí 16
 - náboje 12
 - náboje plošná 129
 - nábojů ionizovaných příměsí čistá 114
 - proudová 12, 49, 106
 - tepelných zdrojů 90
 - tepelných zdrojů objemových 14, 65, 93
 - tepelných zdrojů povrchových 65, 94
 - tepelných ztrát objemová 95
 - tepla objemová 14
 - toku povrchová 13
 - vnitřních nosičů 16, 126
 - zdrojů objemová 13
- hyperkružnice 43
- chyba aproximace křivočaré hranice 11
- aproximace okrajových podmínek 11
- aproximace počátečních podmínek 11
- diskretizační 11, 102
- iterační 11
- metody konečných prvků 11
- modelu 11
- numerické integrace 11
- zaokrouhlovací 11
- idealizace 9, 10
- indikátor chyby 147, 157, 161, 167
- indukce elektrická 12, 106
 - magnetická 12, 49, 106
- integrál Bochnerův 94
- intenzita elektrického pole 12, 106
 - magnetická 49
 - magnetického pole 12, 106
- interpolace 34, 36, 88, 103
 - funkce 36
 - lineární 70
- izolace 50, 92, 104
- izolant 128
- jádro operátoru 152
- jednoznačnost 40
 - přibližného řešení 122
 - řešení 11, 31
 - slabého řešení 75, 84, 85, 88, 90, 95, 120
- kapacita tepelná specifická 14, 93
- koefficient konvektivního přestupu tepla 65
 - přestupu tepla 90, 94, 104
 - rovnice 10
 - termofyzikální 103
- kogradient 41, 43, 94
- kompaktnost operátoru vnoření 90
- koncentrace děr 16, 125
 - elektronů 16, 125
- konstanta generická 18
 - Stefanova-Boltzmannova 65
- konstrukce sítě adaptivní 147, 164
- kontakt 114, 128
- konvergence 68, 90, 110
 - duální metody konečných prvků 42
 - Galerkinových aproximací 88
 - globální 175
 - lokální 175
 - metody konečných prvků 104
 - silná 55, 88
 - slabá 8, 54, 55, 57
- konzistence okrajové a počáteční podmínky 165
- koule otevřená 23

- uzavřená 58, 119
- krok časový 105
- kvadratura numerická 34
- lemma Brambleovo-Hilbertovo 38
 - Céovo 35, 37, 38, 48, 141
 - Laxovo-Milgramovo 19, 26, 31, 32, 35, 40, 53, 82, 109, 110
- limita slabá 57, 83
- materiál anizotropní 92
 - feromagnetický 50
 - ortotropní 50, 77
 - ortotropní nelineární 76
- matice čtvercová 110
 - diagonální 76, 77, 91
 - elektrických vodivostí 106
 - Gramova 34, 97
 - hermitovská 112
 - hermitovsky sdružená 111
 - hmotnostní 96
 - inverzní 99
 - Jacobiova 173
 - jednotková 97
 - komplexně sdružená 111
 - komplexně sdružená k transponované matici 111
 - konstantní 97
 - monotónní 46
 - plná 27, 30
 - poddajnosti 42
 - pozitivně definitní 27, 30, 34, 97
 - pozitivně definitní hermitovská 112
 - regulární 110
 - řídká 27, 30, 111
 - skoková 140
 - stejněměrně pozitivně definitní 76
 - stejněměrně pozitivně definitní symetrická 30, 39, 65, 93, 107
 - symetrická 12, 14, 27, 34, 39, 101
 - symetrická a pozitivně definitní 96–98, 101
 - symetrická komplexní 113
 - symetrická pozitivně semidefinitní 46, 99
 - tepelných vodivostí 65, 77, 91, 93
 - trojúhelníková dolní 96, 105
 - tuhosti 27, 28, 34, 42, 96, 98, 110
 - tuhosti prvku 140
 - velká 111
- metoda bikonjugovaných gradientů 111, 112
 - bilanční 131, 134
 - Galerkinova 26, 27, 107, 110
 - Gaussova-Seidelova iterační 110
 - hyperkruhu 39, 43
 - iterační 11, 30
 - Kačanovova 53, 82, 91
 - klasická 11
 - kolokací 11
 - konečných diferencí 11, 31, 131
 - konečných objemů 142
 - konečných prvků 7, 11, 26, 27, 30, 31, 37, 51, 62, 95, 121, 131, 135, 147, 164
 - konečných prvků duální 39, 41–43
 - konečných prvků hierarchických 169
 - konečných prvků homogenní duální 42
 - konečných prvků konformní 26, 30, 32
 - konečných prvků pohyblivých 164
 - konečných prvků primární 39, 41–43
 - kontinuace 177
 - Newtonova 53, 173
 - Newtonova modifikovaná 176
 - Newtonova-Raphsonova 175
 - Newtonova tlumená 172, 178
 - numerická 10, 11
 - pohyblivé sítě 164
 - postupných aproximací 53, 82
 - přibližná 26
 - přímek 164, 167
 - relaxační 53
 - Rotheova 104
 - sdružených gradientů 30, 110, 112
 - sdružených gradientů zobecněná 53
 - sečných modulů 53
 - superrelaxační 110
 - vnoření 177
 - zamrzlých koeficientů 53
- mnohostěn 32
- mnohoúhelník 32
- množina hustá 55, 62
 - indexová 99
 - konvexní 57, 65, 74
 - neohraničená 68
 - nezáporných funkcí 67
 - relativně otevřená 23, 30, 76, 114
 - spočetná 62
 - stupňů volnosti 34
 - uzavřená 57
 - uzavřená ohraničená 68
 - uzlů 33, 34
- model časově proměnný 126
 - deterministický 11
 - diody jednoduchý 123

diskrétní 11
 hydrodynamický 125
 lineární 45
 magnetohydrodynamický 126
 matematický 10–12
 nelineární 45
 plazmový 125
 s nulovým proudem 126
 stacionární 126
 teplotně proměnný 126
 modelování matematické 9, 13, 15, 72
 numerické 15
 motor asynchronní 104
 multiindex 21

 náboj elementární 16, 125
 napětí tepelné 16, 126
 tepelné vnější (přiložené) 128
 vnitřní 128
 nárůst teploty střední 91
 násobnost řešení 11
 nejednoznačnost řešení 11
 slabého řešení 84, 120
 nerovnice variační 66, 68
 nerovnost Cauchyova-Schwarzova 18, 24, 52, 57,
 80, 86, 89, 98, 102
 Friedrichsova (Poincarého) 24, 31, 38, 47, 53,
 66, 75, 81, 87, 109, 118
 Hölderova 20, 67
 inverzní 98
 trojúhelníková 17, 37, 57
 norma 17, 19, 20, 23, 24, 35, 54, 84, 119
 energetická 135, 143, 148, 165
 euklidovská 49, 59
 euklidovská vektorová 98
 funkce 103
 indukovaná 18, 22, 45, 54
 spektrální maticová 98
 stejnoměrně pozitivně definitní 42
 normála ke straně trojúhelníka 150
 vnější 21
 vnější jednotková 13, 23, 30, 65, 76, 94, 107,
 114
 nosič 27, 42

 oblast 21
 dvojměrná 107
 jednoduše souvislá 41, 49
 konvexní 38
 konvexní ohraničená 109
 nekonvexní 38
 ohraničená 21, 108
 polyedrická 26
 polygonální 90
 trojměrná 106
 obvod magnetický 49, 76, 77, 90, 91
 odhad energie dvoustranný 43
 chyby aposteriorní 11, 38, 39, 42, 44, 147, 164
 chyby apriorní 35, 38, 147, 164
 chyby dvoustranný 39, 44
 operace aritmetická 29, 30
 operátor curl 41, 42, 50, 51, 107
 demispojité 57, 58, 60, 80
 diferenciální 12
 div 12–16, 30, 49, 65, 76, 92, 107, 114, 125, 126
 grad 14, 22
 koercivní 58, 60
 Laplaceův 8, 26, 38, 43
 lineární 17, 48
 lineární spojitý 18, 23, 63
 lipschitzovsky spojitý 47, 48, 52, 58, 62, 75
 lokálně ohraničený 55, 56
 monotónní 8, 45, 46, 48, 51, 54–58, 73, 79
 monotónní demispojité 60
 monotónní potenciální 73
 nelineární 79
 nemonotónní 80
 ostře monotónní 45–47, 74
 potenciální 73, 75, 80
 radiálně spojitý 60
 rot 12, 13, 49, 106–108
 silně monotónní 45–48, 52, 58, 74, 75, 115
 spojitý 58, 119

 parametr diskretizační 18, 28, 147
 konečného prvku 33
 tlumicí 172, 178, 184
 permeabilita 12, 50, 106
 magnetická 108
 vakua 106
 permitivita 12, 16, 106, 123, 130
 dielektrická 114
 prostředí elektrická 126
 plech superioritovaný 50
 podmíněnost matice 112
 podmínka Eulerova 70
 konvergence postačující 35
 konzistence 32, 34, 68
 maximálního úhlu 69
 monotonie 79
 monotónního typu eliptická 62
 okrajová 10, 13, 14, 73, 92, 107, 120, 127, 128,

- 130
- okrajová Dirichletova 123, 128, 134, 164, 174
- okrajová Dirichletova homogenní 26, 108, 109
- okrajová kombinovaná 114
- okrajová nehomogenní 84
- okrajová nelineární 65, 115
- okrajová nelineární smíšená 85
- okrajová Neumannova 21, 129, 148
- okrajová Neumannova homogenní 90
- okrajová Newtonova 76, 94, 129
- okrajová přechodová 128
- okrajová smíšená 16, 30–32, 38, 44, 65, 110, 114
- okrajová Stefanova-Boltzmannova 65, 67, 72
- ortogonalita 44, 100, 103
- počáteční 10, 13, 14, 92, 94, 96, 129, 164
- postačující 25
- symetrie 81, 90
- V -eliptičnosti 19, 48, 66
- Zlámalo 36, 69
- podmnožina relativně otevřená 81, 85
- podprostor konečněrozměrný 35, 82, 83
- pohyblivost děr 114, 115, 126, 130
- elektronů 114, 115, 126, 130
- Poincaré Henri 9
- pól funkce 25
- pole elektrické 16, 114
- elektrické polarizované 107
- elektromagnetické 12
- elektromagnetické střídavé 14, 91
- fyzikální 45
- magnetické 15, 49, 105
- magnetické nelineární stacionární 45
- magnetické stacionární 49
- teplotní 77, 92, 104
- teplotní stacionární 105
- polopás matice 30
- polovodič 128
- polynom 27, 29
- posloupnost Cauchyovská 17, 55
- lineárních úloh 53
- ohraničená 23, 55, 57, 61
- slabě konvergentní 57
- vektorů bikonjugovaná 112
- vektorů biortogonální 112
- potenciál děr elektrochemický 16, 114, 125, 130, 173
- elektrický 7
- elektronů elektrochemický 16, 114, 125, 130, 173
- elektrostatický 15, 114, 120, 123, 125, 130, 173
- gravitační 7
- magnetický 7, 41
- magnetický skalární 50
- v elektrické síti ustálený 173
- pravidlo Cramerovo 30
- princip Heisenbergův 9
- maxima diskrétní 122
- srovnávací 85, 88
- stejného rozdělení chyby 147, 164
- stejněměrné ohraničenosti 55
- problém diskretizovaný 11, 69
- duální 100
- dvojnásobný 123
- konečněrozměrný 11, 26
- lineární 46, 53, 70, 77, 118, 122
- lineární statiky 27
- minimalizační 68
- monotónního typu eliptický 62
- nekonečněrozměrný 11, 26
- nelineární 8, 12, 45, 70, 76, 120
- nelineární Dirichletův eliptický 51
- nestabilní 12
- sálání tepla 65
- se silným tlumením 98
- špatně podmíněný 12
- trojrozměrný 71
- ustáleného vedení tepla 76
- variační 67
- vedení tepla 103
- velkého rozměru 12
- procedura iterační 83
- projekce eliptická 100, 103
- proměnná časová 96, 165
- prostorová 165
- prostor Banachův 17, 18, 25, 54, 63, 72, 118
- Banachův reflexivní 83
- duální 54
- euklidovský 20
- funkcí po částech lineárních 28
- funkcí po částech polynomiálních 95
- Hilbertův 8, 18, 19, 25, 35, 45, 46, 54, 55, 60, 73
- komplexní 17, 106
- konečněrozměrný 31, 48, 55, 58, 60
- konečněrozměrný normovaný 58
- konečných prvků 27, 31, 34, 83, 95
- Lebesgueův 20, 23
- lineárních polynomů 28
- nekonečně diferencovatelných funkcí 21

- nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem 21
- nekonečněrozměrný separabilní 60
- polynomiálních funkcí 33
- reálný 18
- reflexivní 55
- se skalárním součinem 18
- separabilní 60, 62
- Sobolevův 21–25
- Sobolevův s neceločíselnou derivací 103
- spojitých lineárních funkcí 54
- spojitých skalárních funkcí 21
- spojitých zobrazení 94
- stop 23
- testovacích funkcí 26, 31, 65, 94, 115, 121
- vektorový lineární 17, 18
- vektorový normovaný lineární 17
- vektorový normovaný lineární úplný 17
- prostředí anizotropní 12, 14, 50
 - anizotropní nelineární 77
 - homogenní 76
 - izotropní 14, 76
- prvek 27, 32
 - konečný 7, 33, 34
 - konečný bilineární 91
 - konečný kvadratický čtyřstěnný 33
 - konečný Lagrangeův 33, 96
 - konečný trilineární 29
 - konvexní 32
 - Lagrangeův referenční konečný 97
 - lineární trojúhelníkový 68
 - mnohoúhelníkový 33
 - P_K -unisolvantní 33
 - prizmatický čtyřboký 95
 - prizmatický trojboký 95
 - trojúhelníkový 36
- předpoklad saturační 153
- přestup tepla 94
- přírůstek 173
- přístup kontinuální 9
- reakce chemická 14
- reluktivita 49, 50
- rotace 12
- rotor 104
- rovina symetrie 92, 94, 105
- rovnice algebraická 12
 - diferenciální 14
 - diferenciální nelineární 73
 - diferenciální obyčejná 96
 - diferenciální s komplexními koeficienty 106
- eliptická 84
- eliptického typu 14, 114
- Helmholtzova 108
- homogenní 34
- hyperbolického typu 15
- kontinuity 13–15, 114, 125, 173
- Maxwellovy 12, 15, 16, 106, 108
- Maxwellovy časově periodické 13, 106
- nelineární 114
- parabolického typu 14, 92
- parciální diferenciální 10, 12, 14, 15
- Poissonova 26, 109, 129, 134, 172–174
- Poissonova nelineární 125
- rekurentní 105
- rovnováhy 14, 41
- spojitosti 13
- stacionární pro popis polovodiče 114
- transportu 125
- variační 66
- rozdělení Boltzmannovo 16, 126
- rozklad 32
 - Choleského 96, 105
- rozkouskování hmoty 143
- rozvoj Taylorův 69, 97
- rychlost konvergence 36, 37
 - konvergence lineární 70
 - šíření tepla 15
- řád konvergence 36
- řešení analytické 26
 - bilanční metodou 142
 - duální variační formulace 42
 - Galerkinovo 48, 99
 - klasické 31, 66, 94
 - metodou konečných prvků 141
 - násobné 12
 - numerické 12, 15
 - partikulární 40, 41
 - primární variační formulace 42
 - přesné 12
 - přibližné 11, 29, 42
 - slabé 41, 66, 79, 81, 90, 115, 131, 134, 148, 165
 - variační (zobecněné) 68, 70
- řídkost matice 29, 30
 - matice tuhosti 28
- sálání 65
- semidiskretizace úlohy 167
- seminorma 22, 24, 38
- schéma Crankovo-Nicolsonové 105
 - diferenční 132

- diferenční Scharfetterovo-Gummelovo 131
- singularita 37
- síť 32
 - duální 137
- skalár 17
- skok funkce 139, 151
- složka tepelného toku normálová 94
- směr největšího spádu 179
 - spádu 179
- součástka polovodičová 125
- součin skalární (vnitřní) 18, 20, 26, 34, 39, 47, 51, 54, 57, 59, 73, 79, 86, 106, 115
- souřadnice sférické 72
- soustava algebraických rovnic lineárních 27, 30, 111
 - algebraických rovnic nelineárních 172
 - obyčejných diferenciálních rovnic 96
 - obyčejných diferenciálních rovnic homogenních 101
 - polovodičových rovnic 15
- soustavy vzájemně nezávislé 13
- spojitost formy 103
- statistika Boltzmannova 114
- stator 92, 95, 103
- stopa 23, 72
- stroj rotační elektrický 65, 104
 - točivý asynchronní 49, 92
 - točivý synchronní 49, 92
- struktura matice 34
- stupeň volnosti konečného prvku 33
- symbol Kroneckerův 28
- systém Galerkinův 61
 - Maxwellových rovnic 7, 49
 - nelineární 16
 - prostorů konečných prvků 88
 - souřadnicový kartézský 21
 - triangulací 36
 - triangulací regulární 36, 37
 - triangulací silně regulární 36, 97, 98, 100
- šíře polopásu matice 30
- teorie aproximace 35
 - elektromagnetického pole 12
 - grup 9
 - interpolační 88
 - matematická 12
 - monotónních operátorů 45
 - pravděpodobnosti 9
 - relativity speciální 10
 - rovnic diferenciálních 9, 10
- rovnic integrálních 9
- teplo 13
 - specifické 104
- teplota 9, 10, 14, 93, 104
 - počáteční 15
 - pokožová 65, 105
 - povrchová 65
- tok hranicí 13
 - magnetický 41
 - řešení 136
 - tepelný 14, 94
- transformace Kirchhoffova 76, 77
 - podobnostní 99
- transformátor 49, 70, 76, 77, 90, 91, 108
 - suchý 65
- tranzistor MOS 15, 128
- triangulace 27, 28, 32, 95, 121, 122, 135, 149
 - uniformní 28
- trik Aubinův-Nitscheův 37, 99
- tuhost 27
- tvar divergentní 84
- úloha adjungovaná 37, 38
 - Dirichletova 38
 - Dirichletova okrajová 75
 - dvojměrná 107
 - eliptická 147, 164
 - eliptická kvazilineární 76
 - eliptická okrajová 41
 - klasická 94
 - klasická lineární eliptická 30
 - nelineární 46
 - Neumannova 147
 - parabolická 164
 - počáteční 96
 - sálání tepla stacionární 63
 - spojitá 95
 - trojměrná 107
- uzávěr 20
- uzel 30, 33
 - vnitřní 28
- varieta afinní 40, 42
- vedení tepla nelineární anizotropní 76
 - tepla nestacionární 14, 92
 - tepla nestacionární trojměrné 92
 - tepla stacionární (ustálené) 14, 76
- vektor lineární nezávislý 60
 - pravé strany 111
 - sloupcový 111
 - tečný jednotkový 51

- transponovaný 12
- trojrozměrný 12
- veličina bezrozměrná 130
 - elektrická 13
 - magnetická 13
- věta Banachova 48
 - Banachova-Steinhausova 55
 - Brouwerova o pevném bodě 58, 59, 83, 117
 - Eberleinova-Schmulyanova 83
 - Greenova 21, 23, 26, 32, 41, 66
 - Mintyova-Browderova 60
 - o interpolaci 36–38, 103
 - o jednoznačnosti řešení 121
 - o konvergenci 37
 - o monotónních operátorech hlavní 54, 60, 79
 - o opěrném bodě funkcionálu 75
 - o pevném bodě 115
 - o rychlosti konvergence 36
 - o stopách 23, 38, 66, 81, 84, 98
 - o střední hodnotě 53
 - o substituci 72, 97
 - Rellichova 23, 84, 119
 - Rieszova 18, 46, 47, 51, 54
 - Schauderova 117
 - Sobolevova o vnoření 24, 25, 36, 70, 103
 - Tietzeova 84
- vnoření algebraické 20
 - topologické 20
- vodič hliníkový 50
 - měděný 50
- vodivost elektrická 108
 - tepelná 76
 - tepelná nelineární 77
- vzorec Stirlingův 30
- zákon Ampèrův 12
 - Cattaneoův-Maxwellův 15
 - Coulombův 10
 - Faradayův 12
 - Fourierův 14, 15
 - Fourierův nelineární 14
 - Kirchhoffův 65
 - Ohmův 10
 - Poissonův 12
 - síly Newtonův 10
- závislost spojitá 11
- zkouška rozměrová 11
- zobrazení 60
 - gradientní 177
 - identické kompaktní 23
 - kontraktivní 48, 83
 - lineární 46
 - lineární afinní 97
 - lineární spojitě 66
 - lipschitzovsky spojitě 82, 118, 119
 - spojitě 59, 86, 118
- ztráta tepelná 65
- zúplnění 23, 25

Numerické modelování problémů elektrotechniky

Doc. RNDr. Michal Křížek, DrSc.

Doc. RNDr. Karel Segeth, CSc.

Lektorovali: prof. RNDr. Miroslav Feistauer, DrSc.

doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze

Nakladatelství Karolinum Praha 1, Ovocný trh 3

jako učební text pro posluchače Matematicko-fyzikální fakulty UK

Praha 2001

Dáno do tisku: duben 2001

Vytiskla tiskárna nakladatelství Karolinum

AA 9,85 - VA 10,32 - 1. vydání - Náklad 200 výtisků

382-090-01 17/31

Cena Kč 200,-

Publikace neprošla jazykovou ani redakční úpravou nakladatelství