Operads & the blob complex (W. M. Batanin)

Bonn, 18.10.2022, Nice 8.12.2022

Plan: ·) Fields & the Blob Complex
·) motivations
·) Crash course to operadic categories
·) Application to Blobs

Fields Draft at http//users.math.cas.cz/~markl
→ Not specialist, most Destilled info.

manifolds, embeddings, boundaries - Depends on context
d - natural number

Def: System of fields (simplified)

X - mnfld of dim $\leq d+1$ "contravariantly" assigns set $\mathcal{C}(X)$ s.t.

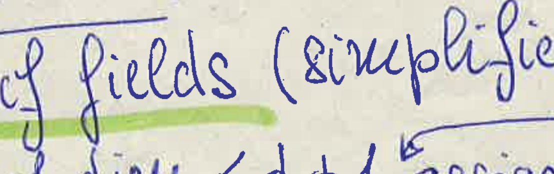
·) $Z \subset \partial X$ cod 0 $\Rightarrow$ functorial restriction

$$\mathcal{C}(X) \ni c \longmapsto c|_Z \in \mathcal{C}(Z)$$

·) $X' \sqcup_Z X''$, $c' \in \mathcal{C}(X')$, $c''(X'')$, $c'|_Z = c''|_Z$

$\exists$ $c' \sqcup_Z c'' \in \mathcal{C}(X' \sqcup_Z X'')$ that restricts to c' resp. c''

gluing



Notation $Z \subset \partial X$, $c \in \mathcal{C}(Z)$, $\mathcal{C}(X;c) := \{f \in \mathcal{C}(X);\ f|_Z = c\}$

Examples $\mathcal{C}(X) = \mathrm{Maps}(X, B)$ ← fixed "space"

$\mathcal{C}(X)$ = equiv. classes of G-bundles w/ connection over X

Def. X – $d+1$ – Dimensional. **Blob** $D \subset X$ is image of standard $\mathbb{D}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ← disc or ball embedded in X

Assumption: $\mathcal{C}(X)$ for X $(d+1)$-Dimensional enriched in Vect (or chain).

Example: Fields from string diagrams & $(d+1)$-cats w/ strong Duality ("Disc categories" s.t. $(d+1)$-morphisms are chain enriched

---

$d=0$, $\mathcal{C}$ is 1-categ. s.t. $\mathcal{C}(A,B) \in$ Vect & involution $* : \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{C}(B,A)$ ($*$-alg. w/ several objects)

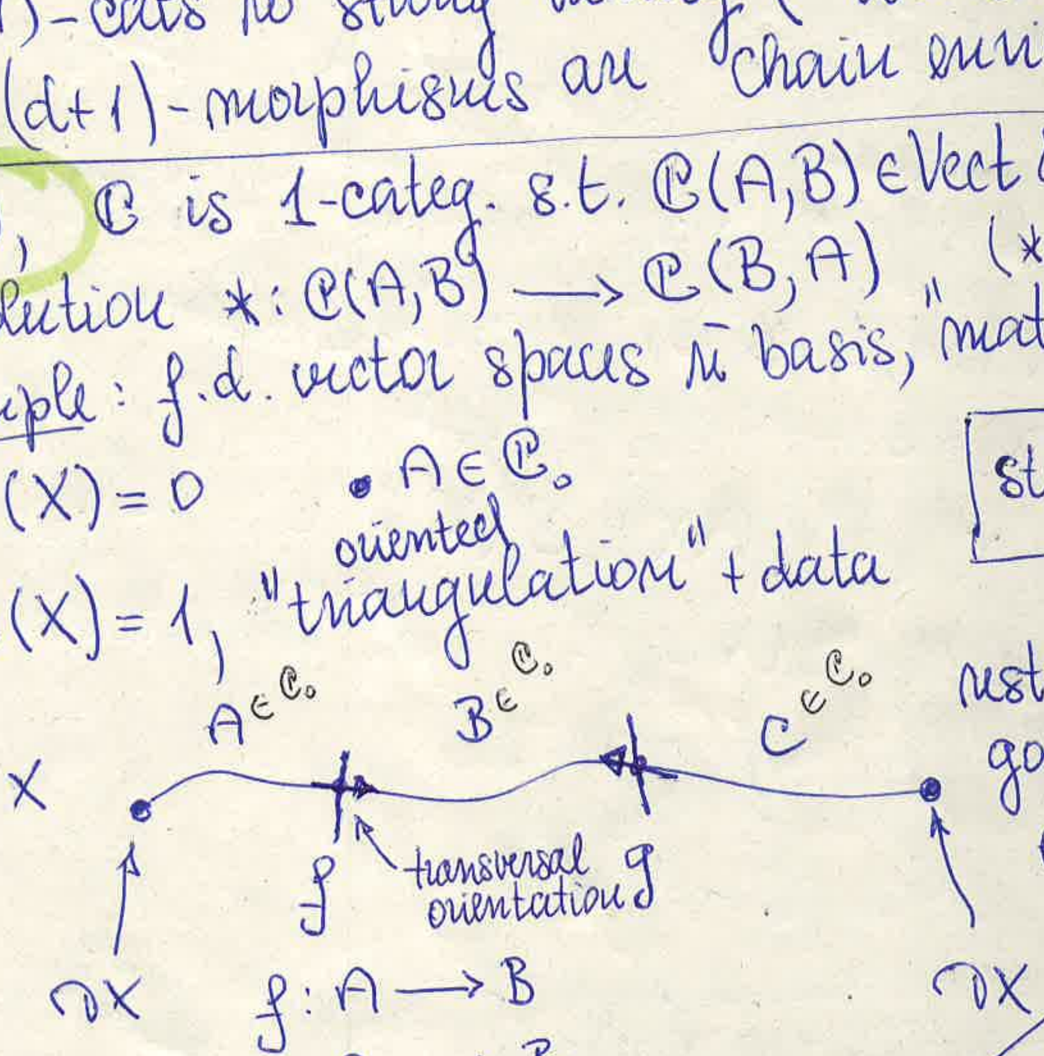
"matrices".

Example: f.d. vector spaces w/ basis, matrices

$\dim(X) = 0$ $\quad \bullet\, A \in \mathcal{C}_0$

String Diags

$\dim(X) = 1$, "oriented triangulation" + data



restriction goes to $A \sqcup C$

$f : A \longrightarrow B$

$g : C \longrightarrow B$

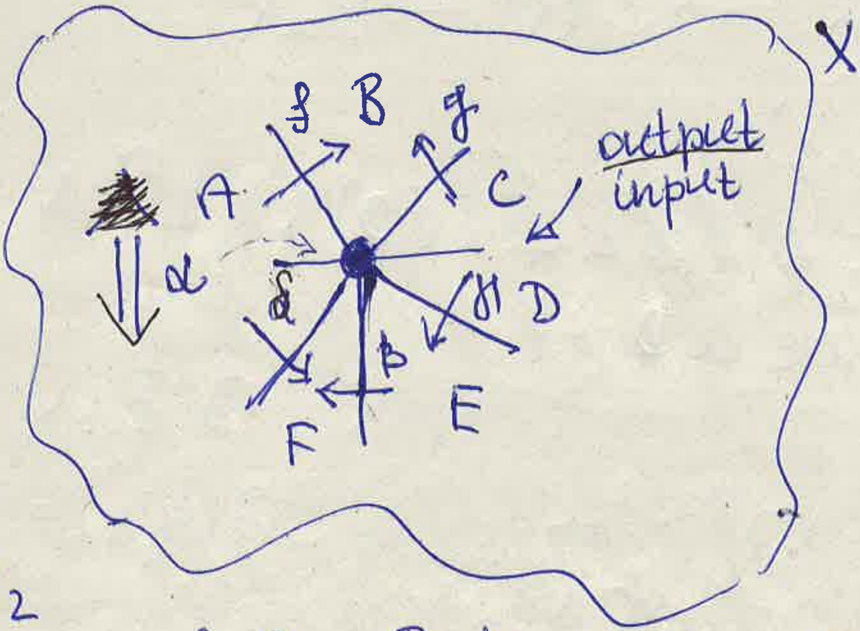
modulo relation

$\overset{}{\underset{f}{\longrightarrow}} = \underset{f^*}{\longleftarrow}$

d=1: dim 0,1 as before

dim 2: $\mathcal{C}(X)$ triangulations w/ local

Data:



$\mathbb{C}$ is 2-categ.

vertices: $\mathbb{C}_2$

edges: $\mathbb{C}_1$

2-cells: $\mathbb{C}_0$

$f: A \to B$, etc

$\alpha: f^* g \Rightarrow \delta^* \beta \gamma$

modulo involutions

Definition local relation - coll of subspaces

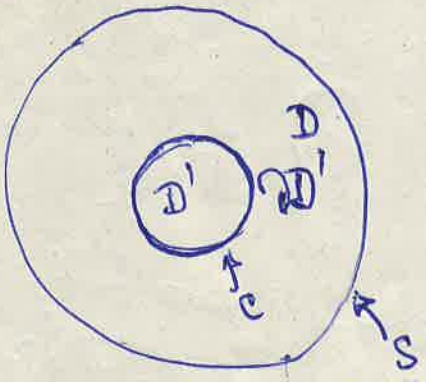
$\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}(D;c) \subset \mathcal{C}(D;c)$, D blob in X, $c \in \mathcal{C}(\partial D)$

which is an ideal in the sense:

$u \in \mathcal{U}(D';c)$

$r \in \mathcal{C}(D \setminus \mathring{D}'; c \sqcup s)$

$\Rightarrow u \sqcup_{\partial D'} r \in \mathcal{U}(D;s)$



Example: $d=1$, $\mathcal{U}$ = kernel of composition of morphisms labelling vertices

Def: $A(X) := \mathcal{C}(X) / \mathcal{U}(X)$

dim $X = d+1$

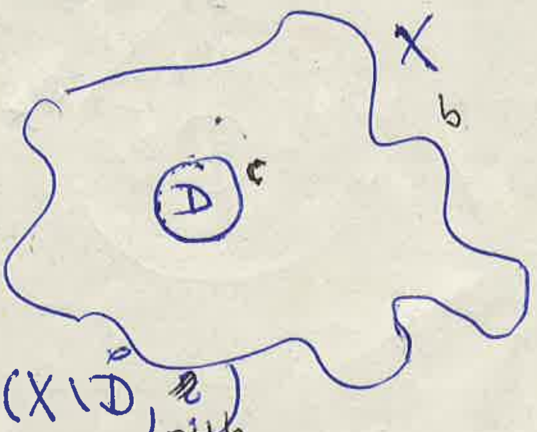
Skein module

TQFT invariant

Spanned by

$u \sqcup_{\partial D} t$

$u \in \mathcal{U}(D;c)$, $t \in \mathcal{C}(X \setminus \mathring{D}, c \sqcup b)$

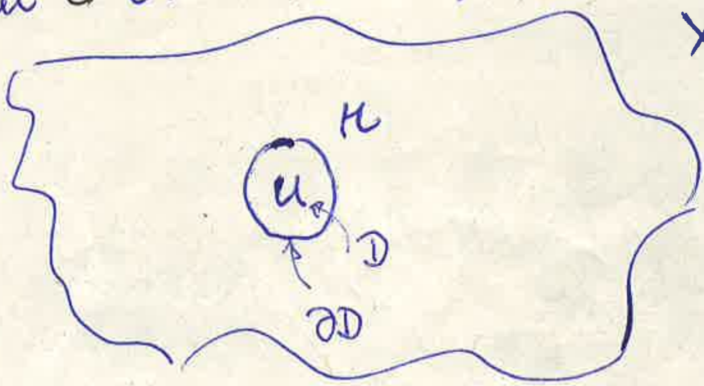


(Kevin Walker, Scott Morrison)

Blob complex: $\dim X = d+1$,

$$B_2(X) \longrightarrow B_1(X) \longrightarrow B_0(X)$$

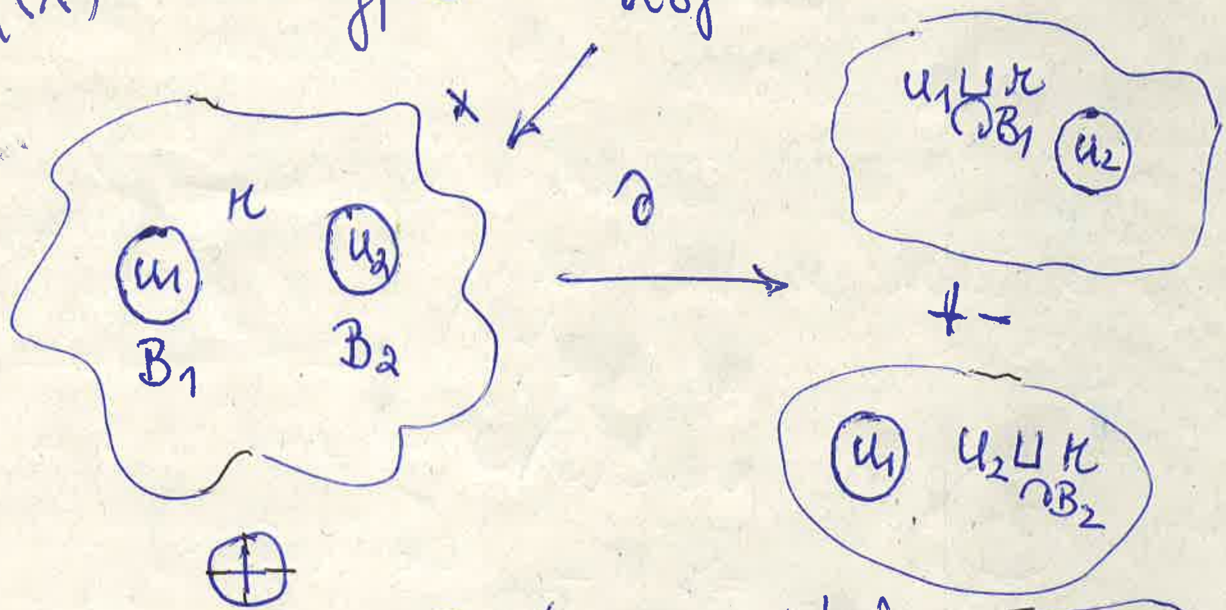
- $B_0(X) := \mathcal{C}(X)$
- $B_1(X)$ data $\left\{ \begin{array}{l} \exists\, B \subset X \text{ blob } \& \ c \in \mathcal{C}(\partial B) \ \& \ r \in \mathcal{F}(X \setminus \mathring{B}; c) \\ \& \ u \in \mathcal{U}(B; c) \end{array} \right.$

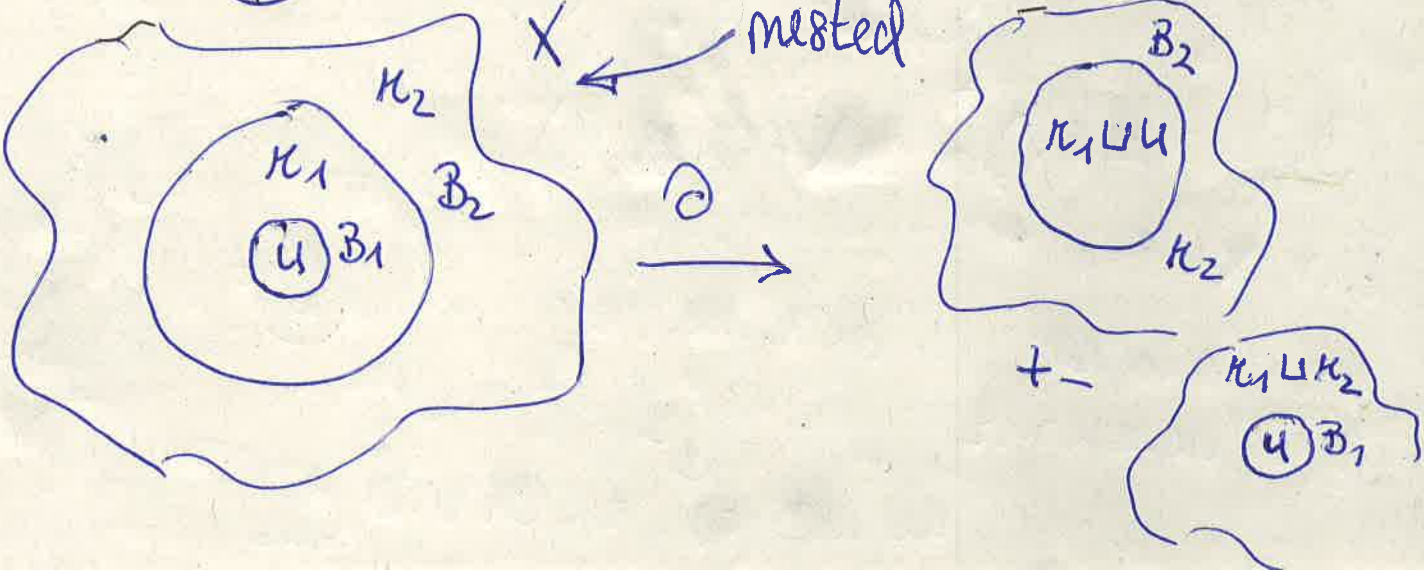


$\partial : B_1(X) \longrightarrow B_0(X)$

$\partial(u, r) = u \sqcup_{\partial B} r$

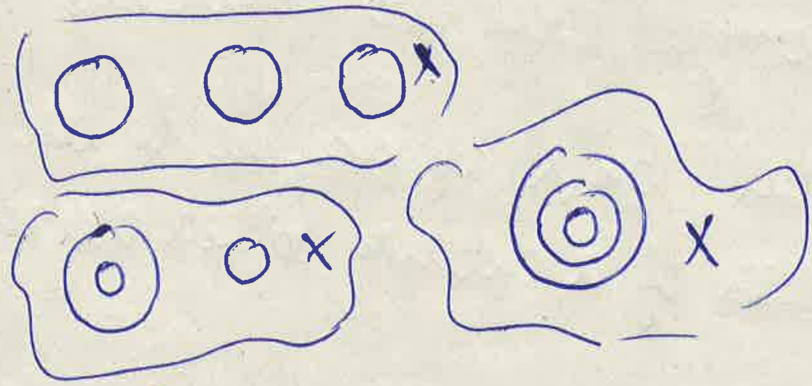
- $B_2(X)$ ... two types Disjoint





Pokračování na druhé straně

- $B_3(X)$: types



$\vdots$

- $B_n(X)$ n blobs mutually disjoint or nested decorated by local relations & fields.

Obvious fact: $H_0(B_*(X)) \cong A(X)$

thus $B_*(X)$ "resolution" of $A(X)$

Motivations listened in 2020 in Berkeley to Kevin, pondered his pictures & realized I saw something similar related to bar ~~const~~ resolutions of operads over certain operadic category of graphs, where instead of X was graph, instead of blobs contractible subgraphs.

Question: is $B_*(X)$ an actual bar resolution, in particular, free module, i.e. cofibrant?

Is therefore $B_*(X)$ an actual derived skein module?

Answer: yes, even two approaches

6

• Classical: $B_*(X)$ isomorphic to bar construction by Fresse of a certain colored operad

trees

levelled trees

• Novel: $B_*(X)$ quasi-isomorphic to bar resolution of an operad over an unary operadic category

I will focus on 2nd as advertisement of operadic categories, namely unary ones.

42. **Ing. Jarmila Bendová,** 57 let, OSVČ
Praha 10, ANO
43. **Mgr. Vladimír Kňazovický,** 31 let, právník, podnikatel
Praha 15, ANO
44. **JUDr. Věra Havlíčková,** 66 let, zastupitelka MČ Praha 17, právník
Praha 17, ANO
45. **David Vágner,** 38 let, jednatel autoservisu
Praha - Čakovice, ANO
46. **Mgr. Yvona Trčalová,** 56 let, podnikatelka
Praha 21, ANO
47. **Ing. Vasil Silvestr Pekař, Ph.D.,** 75 let, prezident České hasičské jednoty, zastupitel Městské části Praha 9
Praha 9, ANO
48. **Josef Endal,** 69 let, auditor
Praha 5, ANO
49. **Ing. Petr Kudrnáč,** 72 let, ekonom
Praha - Vinoř, ANO
50. **Ing. Karel Med,** 51 let, správce IT, předseda SVJ
Praha 14, ANO
51. **Ing. Helena Leisztner,** 66 let, výtvarnice, marketing
Praha 1, ANO
52. **Dominika Tůmová,** 22 let, studentka
Praha 17, ANO
53. **Radek Šimon,** 48 let, telekomunikační technik
Praha 11, ANO
54. **Jana Svatá,** 58 let, OSVČ
Praha 4, ANO
55. **Mgr. Yveta Kvapilová,** 50 let, předsedkyně výboru MČ Praha 13
Praha 13, ANO
56. **MUDr. Marie Kloudová,** 74 let, lékařka
Praha 5, ANO
57. **Tomáš Chaloupka,** 56 let, zastupitel MČ Praha 4, odborný technik
Praha 4, ANO
58. **Michal Fišer, MBA,** 38 let, ekonom, manažer
Praha 8, ANO
59. **Ing. Vít Pěkný, Ph.D.,** 59 let, OSVČ
Praha 21, ANO
60. **Ing. Tomáš Adamják,** 59 let, ekonom
Praha 5, ANO
61. **Ing. Veronika Bušová, MBA,** 52 let, projektová manažerka
Praha 14, ANO
62. **prof. Sergej Zacharov, MD, Ph.D.,** 46 let, lékař, přednosta kliniky
Praha 9, ANO
63. **Ing. Martin Salinger,** 40 let, senior projekt manažer
Praha 22, ANO
64. **Ing. Oldřich Brojír,** 39 let, IT manažer, lektor, zastupitel Městské části Praha 9
Praha 9, ANO
65. **Ing. Milada Staňková,** 64 let, ekonomka
Praha 13, ANO

40. **Lukáš Hazda, DiS.,** 33 let, Support Helpdesk IT
Praha - Libuš, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
41. **Otakar Frankenberger,** 42 let, OSVČ, výroba a servis jízdních kol, výroba cyklopříslušenství
Praha 6, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
42. **Ján Porubský,** 72 let, OSVČ, kominík
Praha 21, Soukromníci, navržen Soukromníci
43. **Patrik Forejt,** 48 let, OSVČ, filmové dekorace, videotechnik
Praha 21, Soukromníci, navržen Soukromníci
44. **Ing. Mgr. Josef Pejřimovský, Ph.D.,** 77 let, lesník, religionista
Praha 6, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
45. **Libor Přerost,** 62 let, majitel autosalonu
Praha - Nebušice, Soukromníci, navržen Soukromníci
46. **Zdeněk Bohdanecký,** 45 let, technický konzultant
Praha 16, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
47. **Petra Benešová,** 44 let, manažerka restaurace
Praha 3, bez politické příslušnosti, navržena KAN
48. **Jan Božejovský,** 77 let, klavírní technik
Praha 2, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
49. **Jan Brunner,** 72 let, živnostník, předseda Počerňáků
Praha 20, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
50. **Karel Kottek,** 46 let, OSVČ, referent specialista zahraničně politických vztahů a služby
Praha 1, Monarchiste.cz, navržen Monarchiste.cz
51. **Milan Hönig,** 48 let, instalatér, topenář
Praha 21, Soukromníci, navržen Soukromníci
52. **Michala Přečková,** 40 let, pedagožka
Praha 3, bez politické příslušnosti, navržena KAN
53. **Mgr. Jitka Matěchová,** 34 let, vrchní zdravotní sestra
Praha 20, bez politické příslušnosti, navržena Soukromníci
54. **Petr Rychtář,** 70 let, chovatel koní, člen Cechu fiakristů a povozníků Čech a Moravy
Praha 4, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
55. **Martin Pohořelý,** 33 let, IT specialista
Praha 20, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
56. **Jan Forman,** 59 let, umělecký kovář
Praha 10, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
57. **Jaroslav Kočí,** 68 let, pracovník sociálních služeb Horní Počernice
Praha 20, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
58. **Bc. Miroslav Zahrádka,** 46 let, OSVČ, podlahářství
Praha 2, bez politické příslušnosti, navržen KAN
59. **Lenka Kouřilová,** 53 let, ředitelka mateřské školy
Praha 4, bez politické příslušnosti, navržena Monarchiste.cz
60. **RNDr. Václav Šrámek,** 72 let, daňový poradce
Praha 6, bez politické příslušnosti, navržen Monarchiste.cz
61. **Ing. Michaela Vondráčková, Ph.D.,** 60 let, vědecká pracovnice
Praha - Dolní Počernice, bez politické příslušnosti, navržena Monarchiste.cz
62. **Miroslava Bojarová,** 57 let, referentka poštovního provozu
Praha 8, bez politické příslušnosti, navržena Monarchiste.cz
63. **Richard Žúbor,** 51 let, dispečer
Praha 8, bez politické příslušnosti, navržen Monarchiste.cz
64. **Michal Tausinger,** 60 let, řidič autobusu
Praha 10, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci
65. **Jaroslav Dotlačil,** 59 let, majitel reklamní agentury
Praha 4, bez politické příslušnosti, navržen Soukromníci

Batanin – Markl 7

Adv. Math. 285 (2015) Op. cats. & Duoidal Deligne conject.

Operadic category: $\mathbb{O} \xrightarrow{|\cdot|} \mathrm{Fin}$ skeletal

$\forall\, f: S \longrightarrow T$ s.t. $|T| = n$ have fibers $F_1, \dots, F_n \triangleright S \xrightarrow{f} T$, + some axioms.

$F_i \in \mathbb{O}$ $\Downarrow$

Operadic category has **operads**: $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(T)\}_{T \in \mathbb{O}}$

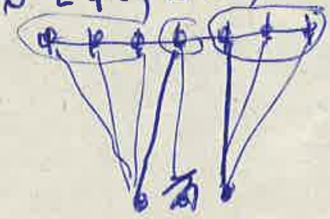
+ structure operations: for f above

$$\mathcal{P}(F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(F_n) \otimes \mathcal{P}(T) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$$

Operads have **algebras** $A = \{A_c\}_{c \in \pi_0(\mathbb{O})}$ but no need here.

Example: $\mathbb{O} = \Delta \xhookrightarrow{|\cdot|} \mathrm{Fin}$

F_1, F_2, F_3: $[4], [1], [3]$



$S = [7]$

$T = [3]$

~~$\mathcal{P}(3) \otimes \mathcal{P}(4) \otimes \mathcal{P}(3)$~~

$$\mathcal{P}(4) \otimes \mathcal{P}(3) \otimes \mathcal{P}(2) \longrightarrow \mathcal{P}(7)$$

$\mathbb{O}$-operads = non-Σ operads

algebras = algebras ~~over~~ for non-Σ operads

Example: $\mathbb{O} = \mathrm{Grc}$ -- connected graphs

$|\cdot| : \mathbb{O} \longrightarrow \mathrm{Fin}$ # of vertices

Fibers – preimages of vertices

operads are "hyperoperads" of Getzler–Kapranov

algebras are terminal $1\!\!1_{\mathrm{Grc}}$ are modular operads

Definition: $\mathbb{O}$ is unary if $_f$ $|T| = 1$ $\forall\, T \in \mathbb{O}$

Thus Diagrams as $F \triangleright S \xrightarrow{f} T$.

Example: $\mathbb{O} = \bullet\circlearrowleft$, $\Rightarrow$ $\mathbb{O}$-operads associative algebras.

But much richer – related to décalage, 2-Segal spaces (cf. Kock, Weber, Lack). Blobs below also.

$\mathbb{O}$-Operad (particular case): $P = \{P(T)\}_{T \in \mathbb{O}}$

and $\gamma_f : P(F) \otimes P(T) \longrightarrow P(S)$

P admits **bar resolution** $\beta_*(P;P) = \{\beta_*(P;P)(T)\}_{T \in \mathbb{O}}$

$\beta_n(P;P)(T)$ direct sum over data

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_n : & T_0 & T_1 \arrow[l, "f_1"'] & \cdots \arrow[l, "f_2"'] & T_{n-1} \arrow[l] & T_n \arrow[l, "f_n"'] & T \arrow[l, "\alpha"'] \\
& & \Delta & & \Delta & \Delta & \Delta \\
& & F_1 & & F_{n-1} & F_n & F
\end{tikzcd}$$

ob. připant

$$P(\mathcal{T}_n) = P(T_0) \otimes P(F_1) \otimes \cdots \otimes P(F_n) \otimes P(F)$$

$$\beta_n(P,P)(T) = \bigoplus_{\mathcal{T}_n} P(\mathcal{T}_n).$$

$\beta_*(P,P)(T)$ chain complex associated to simplicial abelian group above – full analog of MacLane.

I needed $\beta_*(P,M)$ for module, but boring so I put under the rug.

Operadic category of blobs & operad of fields

Particular case of the following construction

$\mathcal{D}$ .. small category $\quad \mathbb{D}(\mathcal{D}) := \coprod_{A \in \mathcal{D}} \mathcal{D}/A$ ← Décalage

n.b. $\mathcal{D}$ has terminal $\odot$) $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ imbeds to $\mathbb{D}(\mathcal{D})$ via

$$A \longmapsto \begin{matrix} A \\ \downarrow \\ \odot \end{matrix} .$$

Fact: $\mathbb{D}(\mathcal{D})$ is ~~op~~ unary operadic category.

fiber:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \arrow[dl, "T"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad f : \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ A \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} Y \\ \downarrow \\ A \end{matrix} \text{ in } \mathbb{D}(\mathcal{D})$$

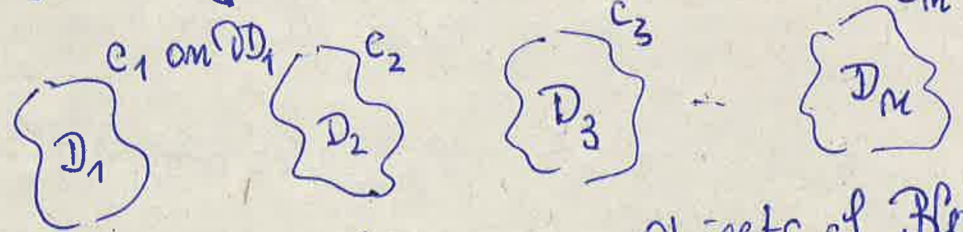
fiber of f is f interpreted as $\begin{matrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{matrix} \in \mathbb{D}(\mathcal{D})$

Fix ambient manifold M.

$\boxed{\mathrm{Blob} := \mathbb{D}(\mathrm{blob})}$, blob .. opposite cat. to inclusions of blob configurations.

objects of blob

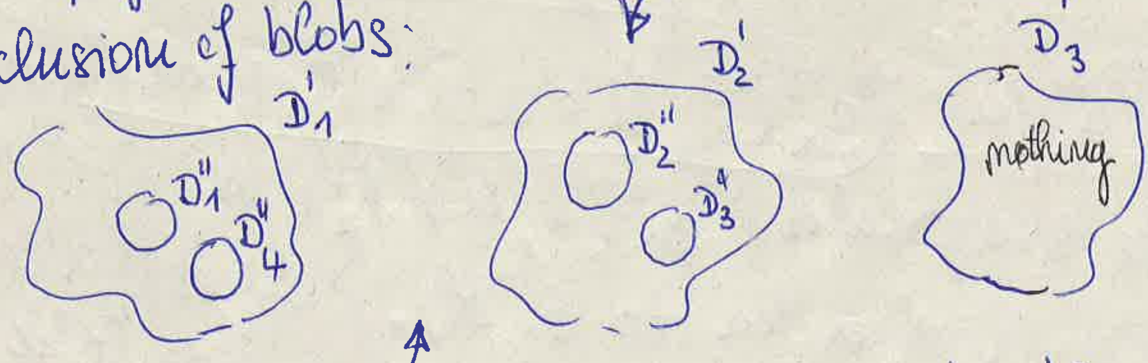
M



+ empty configuration.

Objects of $\mathrm{Blob} = \mathbb{D}(\mathrm{blob})$

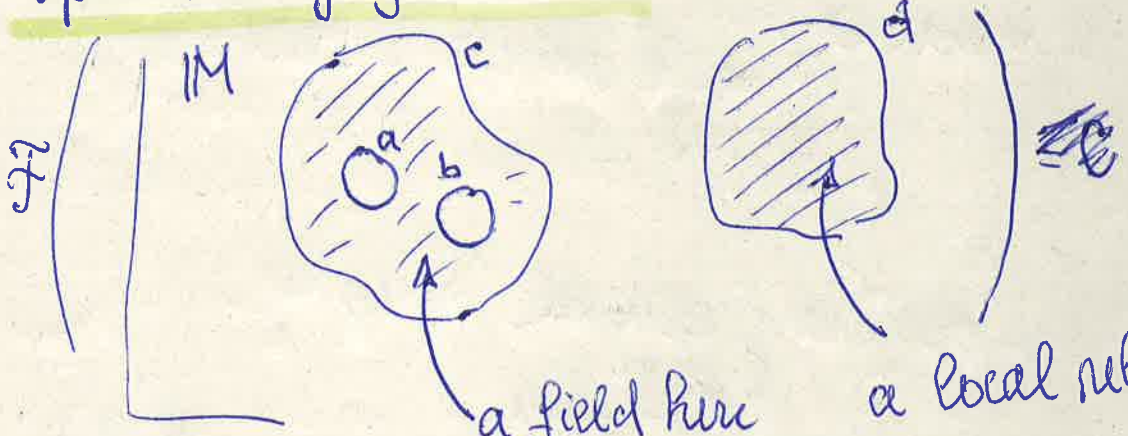
Inclusion of blobs:

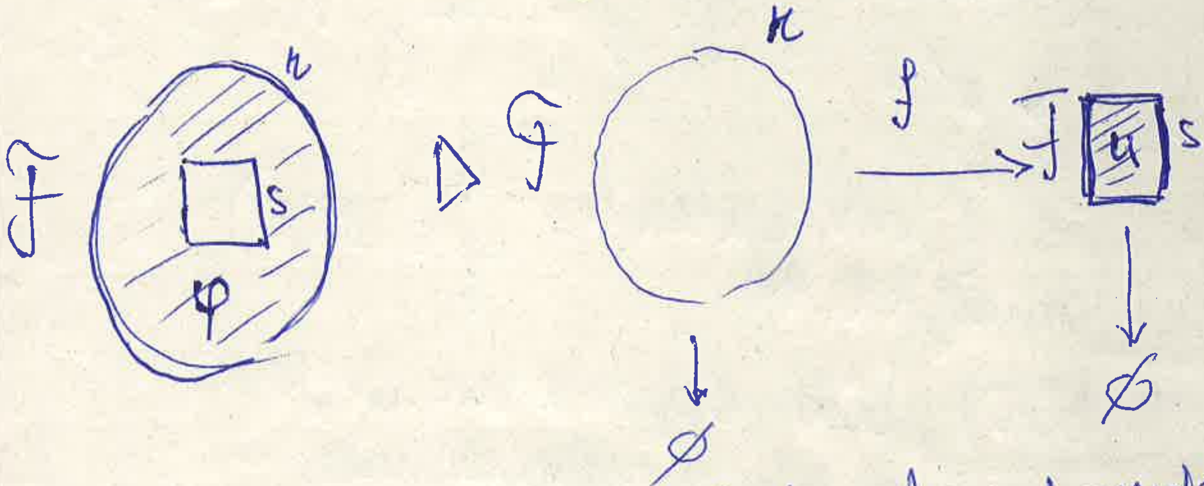


$$\{D_1'', D_2'', D_3'', D_4''\} \hookrightarrow \{\mathcal{D}_1', \mathcal{D}_2', \mathcal{D}_3'\}$$

map in blob = objects of Blob

Operad $\mathcal{F}$ of fields over Blob:





$\mu_f(\varphi, u) = \varphi \sqcup u$ gluing along boundary of $\square$

↙ field (local relation)

did not say what it is

σ

Theorem: $B_*(\mathcal{F}, M)$ is free $\mathcal{F}$-module.

The component $B_*(\mathcal{F}, M)(M)$ is quasi-isomorphic to $A(M)$.

object of a category over Blob