

Matematika II, 1. domácí úkol

1. Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte integrál

$$I = \int_1^{10} \frac{e^{-x}}{x} dx. \quad (1)$$

(pozn. **Věta** (O střední hodnotě integrálů)

Nemění-li funkce $g(x)$ v $\langle a, b \rangle$ znaménko, potom platí

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx, \quad (2)$$

kde $c \in \langle a, b \rangle$.)

2. Pomocí substituce spočítejte určité integrály

- a)

$$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \quad (\text{substituce 1. druhu, t.j. } t = f(x)), \quad (3)$$

- b)

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (\text{substituce 2. druhu, t.j. } x = f(t)). \quad (4)$$

3. Nalezněte úhel ϕ gradientů funkce $f(x, y) = \arcsin \frac{x-1}{y}$, $y \neq 0$ v bodech $A = [1; 1]$ a $B = [3; 4]$.
- 4.
- a) Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y) = x^2 - y^2 + 6xy + 2x$ v bodě $A = [-1; 2]$ ve směru určeném vektorem $\vec{s} = (2; -2)$. Je to směr maximálního růstu funkce f v bodě A ?
 - b) Určete všechny body, v nichž je gradient funkce f roven nulovému vektoru.
 - c) Najděte dotykový bod a rovnici tečné roviny τ ke grafu funkce f rovnoběžné s rovinou $\rho : 4x + 6y - z + 3 = 0$.
- 5.
- a) Ověřte, že rovnicí $F(x, y) \equiv x^2 + 2y^2 - 2xy - y = 0$ je implicitně určena diferencovatelná funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[x_0; y_0] = [1; 1]$.
 - b) Vyšetřete, zda funkce $y = f(x)$ má v bodě $x_0 = 1$ lokální extrém.