Kapitola 4

Regulované funkce

4.1 Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\ \text{ a }\ f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau),$$

tj. má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

4.2 Poznámka. Zřejmě platí $\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b]$, $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset$ a $\mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset$.

Následující tvrzení plyne okamžitě z lemmatu 2.22.

4.3 Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ má na $[a,b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.* □

4.4 Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ regulovaných funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k funkci f, potom $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$ a nechť $\{x_k\}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ a }\ |f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\geq k_0.$$

Potom budeme mít pro všechna $k,\ell\geq k_0$

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\quad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. □

Připomeňme si nyní několik pojmů z matematické analýzy.

4.5 Definice. Nechť $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$. Systém $\mathcal{J} = \{J_k : k \in \mathbb{K}\}$ podmnožin J_k intervalu $[a,b]$ se nazývá *pokrytí intervalu* $[a,b]$, jestliže $[a,b] = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{K}} J_k$. Řekneme, že systém $\mathcal{J}$ je *otevřené pokrytí* intervalu $[a,b]$, jestliže jsou všechny jeho prvky otevřené množiny v $[a,b]$. (Intervaly typu $[a,c)$ a $(d,b]$, kde $c \in (a,b]$ a $d \in [a,b)$ jsou otevřené v $[a,b]$.) Jestliže nějaká část $\mathcal{M}$ pokrytí $\mathcal{J}$ intervalu $[a,b]$ je sama také jeho pokrytím, říkáme, že $\mathcal{M}$ je *podpokrytím* pokrytí $\mathcal{J}$.

Fundamentální význam v matematice má následující tvrzení. Jeho důkaz lze nalézt např. v [14, věta 70]. (Připomeňme ovšem, že interval $[a,b]$ předpokládáme stále ohraničený.)

4.6 Věta (HEINOVA-BORELOVA VĚTA)**.** *Z libovolného otevřeného pokrytí intervalu $[a,b]$ lze vybrat jeho konečné podpokrytí.*

4.7 Definice. Pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, interval $J \subset [a,b]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_J(f) = \sup_{x', x'' \in J} |f(x') - f(x'')| \ \text{ a } \ \omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f) = \max_{i=1,2,\dots,m} \omega_{(\sigma_{i-1},\sigma_i)}(f).$$

Číslo $\omega_J(f)$ bývá nazýváno *modul oscilace funkce f na intervalu J*.

Stěžejním tvrzením této kapitoly je následující věta.

4.8 Věta. *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{S}[a,b]$ (jednoduchých skokových funkcí), která konverguje stejnoměrně k f na $[a,b]$.*

(iii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f) < \varepsilon$.*

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\Longrightarrow$ (i) je dokázána větou 4.4.
b) Předpokládejme, že platí (i), a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom pro každé $x \in [a,b]$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že platí

$$x - \delta(x) > a \text{ pro všechna } x \in (a,b], \quad x + \delta(x) < b \text{ pro všechna } x \in [a,b)$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{(a,a+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \ \omega_{(b-\delta(b),b)}(f) < \varepsilon, \\ &\omega_{(x-\delta(x),x)}(f) < \varepsilon, \ \omega_{(x,x+\delta(x))}(f) < \varepsilon \ \text{ pro všechna } x \in (a,b). \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Intervaly $[a, a+\delta(a))$, $(x-\delta(x), x+\delta(x))$, $x \in (a,b)$, $(b-\delta(b), b]$ tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Heinovy-Borelovy věty 4.6 vybrat pokrytí konečné, tj. konečný systém intervalů

$$[x_0, x_0+\delta(x_0)),\ (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)),\ i=1,2,\dots,m-1,\ (x_m-\delta(x_m), x_m],$$

takový, že $a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$ a

$$[x_0, x_0+\delta(x_0)) \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} (x_i-\delta(x_i), x_i+\delta(x_i)) \cup (x_m-\delta(x_m), x_m] = [a,b].$$

Zvolme σ_i, $i=1,2,\dots,m$, tak, aby platilo

$$\sigma_i \in (x_i-\delta(x_i), x_{i-1}+\delta(x_{i-1})) \cap (x_{i-1}, x_i) \quad \text{pro } i=1,2,\dots,m.$$

a označme $\boldsymbol{\sigma} = \{x_0, \sigma_1, x_1, \dots, x_{m-1}, \sigma_m, x_m\}$. Podle (4.1) máme

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \omega_{(x_j, x_j+\delta(x_j))}(f) < \varepsilon$$

pro $i=1,2,\dots,m$ a $j=0,1,\dots m-1$. Tudíž

$$\omega_{(x_0,\sigma_1)}(f) \le \omega_{(x_0, x_0+\delta(a))}(f) < \varepsilon, \quad \omega_{(\sigma_m, b)}(f) \le \omega_{(x_m-\delta(x_m), x_m)}(f) < \varepsilon,$$
$$\omega_{(\sigma_i, x_i)}(f) \le \omega_{(x_i-\delta(x_i), x_i)}(f) < \varepsilon,\ \omega_{(x_i, \sigma_{i+1})}(f) \le \omega_{(x_i, x_i+\delta(x_i))}(f) < \varepsilon$$

pro $i=1,2,\dots,m$, tj. $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f) < \varepsilon$.

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f) < \varepsilon$. Pro každé $i \in \{1,2,\dots,m\}$ zvolme libovolně $\xi_i \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ a definujme

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in \boldsymbol{\sigma}, \\ f(\xi_i) & \text{pro } x \in (\sigma_{i-1}, \sigma_i). \end{cases}$$

Pro každé $x \in [a,b]$ máme $|f(x) - g_\varepsilon(x)| \le \varepsilon$, a tudíž také $\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon$. Jestliže tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $f_n = g_{1/n}$, bude $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n \to \infty$. $\square$

4.9 Důsledek. *Každá funkce regulovaná na $[a,b]$ je na $[a,b]$ ohraničená.*

D ů k a z. Podle tvrzení (iii) z věty 4.8 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x)| \leq \Big|f\big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\big)\Big| + 1 \quad \text{pro } x \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\ j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Odtud plyne, že $|f(x)| \leq M$ pro všechna $x \in [a,b]$, kde

$$M = \max\Big\{|f(a)|, |f(b)|, \Big|f\big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\big)\Big| + 1, |f(\sigma_j)| : j = 1, 2, \dots, m\Big\} < \infty.$$

□

4.10 Důsledek. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+), & \textit{když } x \in [a,b)\,, \\ f(b), & \textit{když } x = b\,, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(a), & \textit{když } x = a\,, \\ f(x-), & \textit{když } x \in (a,b]\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

Potom obě funkce $\widetilde{f}$ *i* $\widehat{f}$ *jsou regulované na* $[a,b]$ *a*

$$\widetilde{f}(x-) = f(x-),\ \textit{když } x \in (a,b],\ \widetilde{f}(x+) = f(x+),\ \textit{když } x \in [a,b), \tag{4.4}$$

a

$$\widehat{f}(x-) = f(x-),\ \textit{když } x \in (a,b],\ \widehat{f}(x+) = f(x+),\ \textit{když } x \in [a,b), \tag{4.5}$$

D ů k a z. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k ekvivalenci tvrzení (i) a (iii) z věty 4.8, existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že nerovnost $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$ platí, jakmile je $t, s \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Speciálně,

$$|f(t+\delta) - f(s+\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, každou dvojici $t, s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ a každé $\delta > 0$ takové, že $t+\delta, s+\delta \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. Pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každou dvojici $t, s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ tedy platí také

$$|f(t+) - f(s+)| = \lim_{\delta \to 0+} |f(t+\delta) - f(s+\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

neboli

$$\left.\begin{aligned} &|\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(s)|<\varepsilon \\ &\qquad \text{pro každé } j\in\{1,2,\dots,,m\} \text{ a každou dvojici } t,s\in[\sigma_{j-1},\sigma_j). \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

Podobně bychom ukázali, že platí

$$\left.\begin{aligned} &|\widehat{f}(t)-\widehat{f}(s)|<\varepsilon \\ &\qquad \text{pro každé } j\in\{1,2,\dots,,m\} \text{ a každou dvojici } t,s\in(\sigma_{j-1},\sigma_j]. \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

Odtud, vzhledem k ekvivalenci tvrzení (i) a (iii) z věty 4.8, plyne, že obě funkce $\widetilde{f}$ i $\widehat{f}$ jsou regulované na $[a,b]$.

Buď dáno libovolné $x\in[a,b)$. Existuje právě jeden index $j\in\{1,2,\dots,,m\}$ takový, že $x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j)$. Potom v důsledku tvrzení (4.6) máme

$$|\widetilde{f}(t)-f(x+)|=|\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(x)|<\varepsilon \quad \text{pro každé } t\in(x,\sigma_j),$$

tj. $\lim_{t\to x+}\widetilde{f}(t)=f(x+)$ a platí tedy druhé z tvrzení obsažených v (4.4).

Analogicky, nechť $x\in(a,b]$. Pak existuje právě jedno $j\in\{1,2,\dots,,m\}$ takové, že $x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j]$. Nechť $t\in(\sigma_{j-1},x)$ a $0<\delta<\min\{x-t,t-\sigma_{j-1}\}$. Potom $x-\delta,\ t+\delta\in(\sigma_{j-1},\sigma_j)$ a podle definice dělení $\boldsymbol{\sigma}$ platí

$$|f(x-\delta)-f(t+\delta)|<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

To znamená, že

$$|f(x-)-\widetilde{f}(t)|=\lim_{\delta\to 0+}|f(x-\delta)-f(t+\delta)|<\varepsilon$$

neboli $\widetilde{f}(x-)=f(x-)$. Platí tedy platí tedy i první tvrzení z (4.4).

Analogicky bychom dokázali vztahy (4.5). □

4.11 Důsledek. *Pro každé $\varepsilon>0$ existuje nejvýše konečně mnoho $x\in[a,b]$ takových, že platí*

$$|\Delta^+f(x)|>\varepsilon \quad \textit{nebo} \quad |\Delta^-f(x)|>\varepsilon.$$

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z věty 4.8 ke každému $\varepsilon > 0$ můžeme najít dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pro } x, y \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j),\ j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Speciálně $|\Delta^+ f(x)| = |f(x+) - f(x)| \le \varepsilon$ a $|\Delta^- f(x)| = |f(x) - f(x-)| \le \varepsilon$ pro všechna $x \in [a, b] \setminus \boldsymbol{\sigma}$. Platí tedy tvrzení tohoto důsledku. □

4.12 Věta. $\mathbb{G}[a, b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě* $\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

D ů k a z . Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a, b]$ je cauchyovská v prostoru $\mathbb{G}[a, b]$. Jako v částech a) a b) důkazu věty 2.20 můžeme dokázat, že existuje funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Podle věty 4.4 je $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a tím je věta dokázána. □

4.13 Poznámky. (i) Podle definice 2.33 (i) je $f \in \mathbb{S}[a, b]$ právě tehdy, když existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$ takové, že f je konstantní na každém podintervalu (σ_{j-1}, σ_j). Každá funkce z $\mathbb{S}[a, b]$ je konečná lineární kombinace funkcí tvaru $\chi_{(\alpha,\beta)}$ a $\chi_{[\tau]}$, kde (α, β) může být libovolný podinterval v $[a, b]$ a τ může být libovolný bod v $[a, b]$. Platí ovšem $\chi_{(\alpha,\beta)} = \chi_{(\alpha,b]} - \chi_{[\beta,b]}$ pro libovolná $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha < \beta$ a $\chi_{[\tau]} = \chi_{[\tau,b]} - \chi_{(\tau,b]}$ pro každé $\tau \in [a, b)$.

Tudíž $f \in \mathbb{S}[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[\tau, b]$, $(\tau, b]$, $\tau \in [a, b]$ a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a, b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a, b),\ \chi_{[b]}\Big),$$

kde $\mathrm{Lin}\,(M)$ značí lineární obal množiny M. Podobně bychom ukázali, že je také

$$\mathbb{S}[a, b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\ \chi_{[a,\tau)},\ \tau \in (a, b],\ \chi_{[a]}\Big).$$

(ii) Množina $\mathbb{S}[a, b]$ je, vzhledem k ekvivalenci tvrzení (i) a (ii) z věty 4.8, hustá v $\mathbb{G}[a, b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a, b]} = \mathbb{G}[a, b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a, b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a, b]$ v $\mathbb{G}[a, b]$.

4.14 Cvičení. Nechť $h(x) = 1$, je-li $x = 1/k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $h(x) = 0$ pro ostatní $x \in [0, 1]$. Rozhodněte, zda je funkce h regulovaná na $[0, 1]$.

4.15 Lemma. *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí též*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \ \ \textit{a} \ \ f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \ \ \textit{na}\ [a,b],$$

kde $f(a-)=f(a),\ f(b+)=f(b)$ *a* $f_n(a-)=f_n(a),\ f_n(b+)=f_n(b)$ *pro* $n\in\mathbb{N}$.
D ů k a z . Pro $n\in\mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+), & \text{když } x\in[a,b), \\ f_n(b), & \text{když } x=b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+), & \text{když } x\in[a,b), \\ f(b), & \text{když } x=b. \end{cases}$$

Podle důsledku 4.10 jsou všechny funkce $\widetilde{f},\ \widetilde{f}_n,\ n\in\mathbb{N},$ regulované na $[a,b]$.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Existuje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t)-f(t)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n\geq n_\varepsilon$ a každé $t\in[a,b]$. Odtud limitním přechodem $t\to x+$ dostaneme, že pro každé $x\in[a,b)$ a každé $n\geq n_\varepsilon$ platí také

$$|\widetilde{f}_n(x)-\widetilde{f}(x)| = \lim_{t\to x+}|f_n(t)-f(t)| < \varepsilon\,,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty}\|\widetilde{f}_n-\widetilde{f}\|=0 \ \ \text{neboli} \ \ f_n(x+)\rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a,b]\,.$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-)\rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Ve zbývající části kapitoly uvedeme několik tvrzení, která budou později (zejména v kapitolách 6 a 7) užitečná. Nejprve shrneme důsledky lemmatu 4.15 pro některé důležité podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

4.16 Důsledky. *Množiny*

$$\left.\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-) = f(x) \textit{ pro } x\in(a,b]\},\\
\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x+) = f(x) \textit{ pro } x\in[a,b)\},\\
\mathbb{G}_{reg}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-)+f(x+) = 2\,f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b] &= \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(a+) = f(a),\ f(b-)=f(b)\\
&\qquad\qquad f(x-)+f(x+) = 2\,f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\}
\end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$, *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

4.17 Poznámka. Jestliže regulovaná funkce f splňuje na intervalu (a,b) podmínku $f(x-)+f(x+)=2\,f(x)$, říkáme, že f je *regulární* na (a,b). O funkcích z prostoru $\widetilde{\mathbb{G}}_{\text{reg}}[a,b]$ pak říkáme, že jsou regulární na uzavřeném intervalu $[a,b]$.

4.18 Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].\quad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

a) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0$. Podle věty 4.8 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro}\ \ x\in[a,b]. \tag{4.9}$$

Dále pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro}\ \ t\in(x-\delta(x),x).$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|\le 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{pro}\ \ x=a \text{ nebo } x=b,\\ \varphi(x-) & \text{pro}\ \ x\in(a,b).\end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon,\quad \text{když } x=a \text{ nebo } x=b,$$

a

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|$$
$$\le |f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-\varphi(x-)|<4\,\varepsilon, \quad \text{když } x\in(a,b).$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]$.

b) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a funkce $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí (4.9). Potom musí být také

$$\left.\begin{aligned} &|f(x-)-\varphi(x-)|\le\varepsilon \quad \text{pro } x\in[a,b),\\ \text{a}\quad &\\ &|f(x+)-\varphi(x+)|\le\varepsilon \quad \text{pro } x\in(a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases} \varphi(a), & \text{když } x=a,\\ \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+)+\varphi(x-)\Big), & \text{když } x\in(a,b),\\ \varphi(b), & \text{když } x=b. \end{cases} \tag{4.11}$$

Potom $\widetilde{\varphi}\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Dále vzhledem k (4.10) a (4.11),

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=\Big|\tfrac{1}{2}\,[f(x+)+f(x-)]-\tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+)+\varphi(x-)]\Big|$$
$$\le\tfrac{1}{2}\,\Big(\big|f(x+)-\varphi(x+)\big|+\big|f(x-)-\varphi(x-)\big|\Big)\le\varepsilon$$

když $x\in(a,b)$. Konečně, podle (4.9) a (4.11) máme

$$|f(x)-\widetilde{\varphi}(x)|=|f(x)-\varphi(x)|<\varepsilon, \qquad \text{když } x=a \text{ nebo } x=b.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. □

4.19 Lemma.

$$\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]},\tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big),$$
$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm L}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\tau\in[a,b]\Big),$$
$$\mathbb{G}_{\rm R}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[a]},\chi_{[a,\tau)},\tau\in(a,b]\Big),$$
$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm R}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b]\Big),$$
$$\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(a,b]},\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in(a,b),\ \chi_{[b]}\Big),$$
$$\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\ \tau\in(a,b)\Big).$$

D ů k a z . První tvrzení je obsaženo v poznámce 4.13 (i). Dokážeme ještě např. předposlední z uvedených relací.

Nechť tedy $f \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$. Potom existují

$$m \in \mathbb{N},\; c_0, c_1, \dots, c_{m+1} \in \mathbb{R} \;\text{ a }\; \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}[a,b]$$

takové, že

$$f(x) = \begin{cases} c_0, & \text{když } x = a, \\ c_j, & \text{když } x \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \text{ pro nějaké } j = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{c_j + c_{j+1}}{2}, & \text{když } x = \sigma_j \text{ pro nějaké } j = 1, 2, \dots, m{-}1, \\ c_{m+1}, & \text{když } x = b, \end{cases}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= c_0\, \chi_{[a]}(x) + \sum_{j=1}^{m} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(x) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \big(c_j + c_{j+1}\big)\, \chi_{[\sigma_j]}(x) \right) + c_{m+1} \chi_{[b]}(x) \text{ pro } x \in [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Pravou stranu vztahu (4.12) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f &= c_0\, \chi_{[a,b]} - c_0\, \chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j,b]} - c_m\, \chi_{[b]} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j]} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\, \chi_{[\sigma_j]} + c_{m+1}\, \chi_{[b]} \\ &= c_0\, \chi_{[a,b]} - c_0\, \chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j \big(\chi_{(\sigma_j,b]} + \chi_{[\sigma_j]}\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j]} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\, \chi_{[\sigma_j]} + \big(c_{m+1} - c_m\big)\, \chi_{[b]} \\ &= c_0\, \chi_{[a,b]} - c_0\, \chi_{(a,b]} + \sum_{j=0}^{m-1} c_{j+1}\, \chi_{(\sigma_j,b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{(\sigma_j,b]} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j]} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} c_{j+1}\, \chi_{[\sigma_j]} + \big(c_{m+1} - c_m\big)\, \chi_{[b]} \end{aligned}$$

$$= c_0\chi_{[a,b]} + (c_1 - c_0)\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1}(c_{j+1} - c_j)\left(\chi_{(\sigma_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]}\right)$$

$$+ (c_{m+1} - c_m)\,\chi_{[b]}$$

$$= d_0\chi_{[a,b]} + d_1\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^{m} d_j\left(\chi_{(\sigma_{j-1},b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}\right) + d_{m+1}\,\chi_{[b]},$$

kde

$$d_0 = c_0,\;\; d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \; j = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{4.13}$$

Máme tedy $f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)$. Navíc vztahy (4.13) určují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory $(c_0, c_1, \ldots, c_m, c_{m+1})$ a $(d_0, d_1, \ldots, d_m, d_{m+1})$. Tudíž

$$\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big).$$

□

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze najít zejména v monografii *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [12, sec.3] Ch. Höniga. Užitečné speciální dodatky (např. charakterizace prekompaktních množin v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$, zobecnění Hellyovy věty o výběru) jsou obsaženy také v práci D. Fraňkové [6].