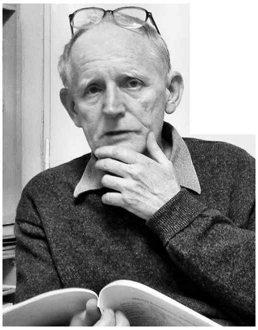
Předmluva

Tato publikace je vlastně pokračováním monografie Štefana Schwabika „*Integrace v R (Kurzweilova teorie)*“ [46] věnované teorii integrálu přes jednorozměrné intervaly. V této monografické učebnici se autorovi podařilo vysvětlit nejen klasické pojmy Newtonova i Riemannova integrálu, ale i integrálu McShaneova a především Kurzweilova. Poprvé byl tak širokému okruhu českých čtenářů (včetně studentů fakult s matematicko-fyzikálním zaměřením) předložen ucelený výklad jednoho z nejuznávanějších příspěvků české matematiky do pokladnice světové matematiky: součtové definice neabsolutně konvergentního integrálu. Tato definice náleží Jaroslavu Kurzweilovi a poprvé ji uvedl v práci publikované v roce 1957 v časopise Czechoslovak Mathematical Journal (viz [28]). Nový integrál, který se dnes ve světové matematické literatuře nazývá integrál Kurzweilův, resp. integrál Kurzweilův-Henstockův (nezávisle na J. Kurzweilovi publikoval definici analogického integrálu v roce 1960 specialista v teorii integrálu Ralph Henstock ze Spojeného království), se od té doby ukázal být velice inspirativním nejen pro teorii integrálu (zahrnuje klasické a dobře známé pojmy Riemannova a Newtonova integrálu včetně jejich nevlastních modifikací a obtížněji zvládnutelné integrály Lebesgueův a Perronův), ale i pro teorii diferenciálních a integrálních rovnic. Z hlediska metodického důraz kladený na Kurzweilův integrál umožnil Š. Schwabikovi soustředit se na neabsolutně konvergentní integrály, které ve starší metodice teorie integrálu byly považovány za velmi obtížně vysvětlitelné. Kurzweilův pojem integrálu je totiž ekvivalentní s integrálem Perronovým, který je neabsolutně konvergentní. Jeho definice přitom zdánlivě téměř mechanicky „kopíruje“ definici Riemannovu, která je pro studenta nejpřijatelnější svou názorností a výraznou geometrickou interpretací. Právě srovnání s Riemannovou definicí však ukazuje,

Thomas Joannes Stieltjes

Jaroslav Kurzweil



Štefan Schwabik

jak důmyslná je její nenápadná, ale přitom velmi účinná Kurzweilova modifikace. Velkou výhodou je rovněž ten rys Kurzweilova integrálu, že nepotřebuje zobecnění na nevlastní integrály – platí pro něj totiž věta Hakeova typu (tj. věta o limitním přechodu vzhledem k mezím integrálu).

V integrálech Riemannově, Newtonově, Lebesgueově, Perronově, Kurzweilově se integruje daná funkce vzhledem k identické funkci. Některé fyzikální problémy si však vynutily rozšíření pojmu integrálu na integrál, ve kterém se daná funkce integruje vzhledem k funkci, která nemusí být obecně identita. Poprvé se takový integrál vyskytl ve slavném Stieltjesově pojednání [57] z let 1894–5, věnovaném souvislostem konvergence řetězových zlomků a problému, jak popsat rozložení hmoty na hmotné úsečce, jsou-li známy všechny momenty této úsečky přirozených řádů.

Integrály tohoto typu jsou od té doby nazývány *Stieltjesovy integrály* a integrál funkce f (*integrand*) vzhledem k funkci g (*integrátor*) přes interval $[a,b]$ se od té doby značí $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g.$ K různým modifikacím definice, které časem vznikly, se pak přidávají zpravidla jména autorů těchto modifikací. Brzy se objevily integrály: Riemannův-Stieltjesův, Perronův-Stieltjesův či Lebesgueův-Stieltjesův. Dalším významným impulsem, který obrátil pozornost ke Stieltjesovu integrálu, byl fundamentální Rieszův výsledek z roku 1909 (viz [40]) o tom, že každý spojitý lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí může být vyjádřen pomocí Stieltjesova integrálu. Vzápětí, v roce 1910, dokázal H. Lebesgue (viz [30]), že pro spojitou funkci f a funkci g s konečnou variací lze pomocí vhodné substituce vyjádřit Stieltjesův integrál jako Lebesgueův integrál tvaru $\int_a^{v(b)} f(w(t))\, h(t)\, \mathrm{d}\, t,$ kde $v(x)$ je variace funkce g na intervalu $[a,x]$, w je zobecněná inverzní funkce k v, $w(t) = \inf\{s \in [a,b] : v(s) = t\}$ pro $t \in [a,b]$, a $h(t) = \mathrm{d}\, g(w(t))/\mathrm{d}\, t$ pro s.v. $t \in [a, v(b)].$ H. Lebesgue takto dospěl k pojmu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu funkce f vzhledem ke $g.$ Několik let po Rieszově výsledku se v roce 1912 objevuje Stieltjesův integrál také v monografii O. Perrona [39]. V dalších zhruba dvou desetiletích byl Stieltjesův integrál a jeho modifikace předmětem bádání řady významných osobností teorie funkcí: W. H. Young ([65], 1914), C. J. de la Vallée Poussin ([60], 1917), E. B. Van Vleck ([61],1917), T. H. Hildebrandt ([10], 1917), L. C. Young ([63], 1927 a [64],1936), A. J. Ward ([62], 1936) a další. V roce 1933 věnoval S. Saks ve své slavné monografii [42] integrálu Lebesgueovu-Stieltjesovu a funkcím s konečnou variací celou kapitolu. Do dnešních dnů našly integrály Stieltjesova typu široké uplatnění v mnoha oblastech: např. v teorii křivkových integrálů, teorii pravděpodobnosti, teorii hystereze, teorii funkcionálně-diferenciálních, zobecněných diferenciálních rovnic ap. Historii teorie integrálu je věnována řada monografií. Není mi však známo, že by se některá z nich věnovala zevrubněji historii Stieltjesova integrálu. Existuje dokonce i znamenité dílko v češtině „*Malý průvodce historií integrálu*“ autorů Š. Schwabika a P. Šarmanové, které je nyní díky *České digitální matematické knihovně* volně přístupné na internetu. Žel, ani sem se Stieltjesův integrál nevešel. Pro znalce francouzštiny připomeňme alespoň historickou esej [36] J. Mawhina.

Vzhledem k omezenému přidělenému rozsahu nemohl Štefan Schwabik do své monografie zahrnout přirozené zobecnění Kurzweilova pojmu integrálu na Stieltjesovy integrály, ač jsme v té době už měli „Kurzweilovu teorii“ Stieltjesova integrálu v našich společných pracích (viz např. [55]) věnovaných zobecněným diferenciálním rovnicím do značné míry zpracovánu a připravenu. Je mou ctižádostí navázat na jeho počin a doplnit jeho monografii o teorii Stieltjesova integrálu s důrazem na Kurzweilovu definici a některé její aplikace. Výklad v této knize je rozdělen do 8 kapitol. V úvodní kapitole jsou stručně popsány dvě z mnoha motivací pro studium Stieltjesova integrálu: problém momentů a křivkové integrály. Zavedeno je tu též základní značení závazné pro celou knihu. Další tři kapitoly jsou přípravné a poskytují přehled o vlastnostech tříd funkcí, se kterými se v této knize nejčastěji pracuje: funkce s konečnou variací, funkce absolutně spojité a funkce regulované. Rozsáhlá pátá kapitola je věnována klasickým definicím Riemannova-Stieltjesova integrálu a vlastnostem takto definovaných integrálů. Jádrem celé knihy je pak kapitola 6 věnovaná definici Stieltjesova integrálu v Kurzweilově smyslu. Jsou tu demonstrovány přednosti této definice: šíře třídy funkcí integrovatelných v tomto smyslu, široká škála vlastností takto definovaného integrálu, např. platnost velmi obecných vět o limitním přechodu včetně Hakeovy věty, o integraci per-partes a různých formách substituce. V závěrečných dvou kapitolách jsou popsány některé vybrané aplikace ve funkcionální analýze a v teorii zobecněných diferenciálních rovnic.

Samozřejmě bylo by možno pokračovat dále. Podstatnou část zde vyložené teorie Kurzweilova-Stieltjesova integrálu je možno přenést i na integraci v abstraktních prostorech (viz [50]–[53] a [37]). Významné uplatnění nachází Kurzweilův-Stieltjesův integrál v dnes velmi populární teorii dynamických systémů na „časových škálách“ neboli „time scales“ (česká terminologie se dosud neustálila), viz [56] a [38]. To je však už hudba budoucnosti a do této publikace se už nic víc nevejde. I tak její stávající rozsah výrazně převyšuje rozsah původně plánovaný.

Předkládaným textem bych rád také poněkud zaplnil stávající mezeru v české literatuře. V druhém dílu *Integrálního počtu* Vojtěcha Jarníka (viz [15]) jsou věnovány dvě kapitoly (III a X) výkladu teorie integrálu Lebesgueova-Stieltjesova, který ovšem vyžaduje značnou porci znalostí o teorii míry a přitom je méně obecný než integrál Kurzweilův-Stieltjesův. Celé monumentální a zakladatelské dílo Vojtěcha Jarníka bylo právě zpřístupněno na webových stránkách *České digitální matematické knihovny* a může tedy posloužit čtenářům k upřesnění některých zde pouze naznačených souvislostí s teorií míry. Pěkný, ale stručný úvod do teorie Riemannova-Stieltjesova integrálu je obsažen též v dnes již v podstatě nedostupných skriptech [17] J. Krále o teorii potenciálu z roku 1965. Podrobně je o různých formách Stieltjesova integrálu pojednáno v dnes již, bohužel, také těžko dostupných skriptech [31] J. Lukeše. Je třeba také zmínit rozsáhlý traktát J. Maříka [35] z roku 1952, který měl zejména zásadní význam pro propagaci Perronova i Perronova-Stieltjesova integrálu v našich krajích. (Také on je nyní dostupný na stránkách *České digitální matematické knihovny*.)

Pokud jde o cizojazyčnou literaturu, mohu doporučit čtenářům zajímajícím se o další souvislosti v rámci klasické teorie monografii [11] T. H. Hildebrandta a také nenápadnou, ale moderně pojatou monografii R. M. McLeoda [34] z roku 1981 zahrnující dokonce i Kurzweilův-Stieltjesův integrál. Další podněty může čtenář najít také v monografiích A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina [16], E. Schechtera [43], W. Rudina [41] nebo skriptech J. Lukeše a J. Malého [33]. Dvě náročné monografie [25] a [26] J. Kurzweila z let 2000 a 2002 věnované topologickým problémům souvisejícím s integrací se stieltjesovské integrace přímo nedotýkají. Integrály a zobecněné diferenciální rovnice studované v Kurzweilově nejnovější monografii [27] však zahrnují Kurzweilův-Stieltjesův integrál i lineární zobecněné rovnice, kterými se zabýváme v kapitolách 6 a 8 této knihy. Vynikajícím doplňkem této publikace bude, kromě již zmíněné Schwabikovy monografie [46], také jeho další monografie [45] věnovaná speciálně zobecněným diferenciálním rovnicím.

Tento text vznikal po několik let jako pomůcka pro posluchače výběrových přednášek na Přírodovědecké fakultě Palackého univerzity v Olomouci v rámci výuky matematické analýzy. Jsem vděčen *Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity* za to, že mi umožňuje tyto přednášky konat, a studentům několika ročníků za to, že bez viditelného reptání mé přednášky navštěvovali. Kniha by měla být srozumitelná všem, kdo absolvovali základní kursy matematické a funkcionální analýzy. Ve výkladu se snažím vyhýbat teorii míry, jak je to jen možné. Nicméně ti, kteří mají aspoň základní znalosti o této oblasti, budou mít výhodu při porozumění některým (víceméně okrajovým) pasážím této knihy.

Závěrem předmluvy chci poděkovat za velkou pomoc mým vzácným kolegům

Jaroslavu Kurzweilovi, Ireně Rachůnkové, Antonínu Slavíkovi, Jiřímu Šremrovi a Ivo Vrkočovi, kteří podrobně přečetli rukopis tohoto textu a pomohli mi odstranit mnohé nedostatky a vylepšit výklad. Text byl vysázen v systému LaTeX s využitím některých prvků stylu vyvinutého v Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo v São Carlos v Brazílii. Za jeho poskytnutí děkuji kolegyním Giselle Antunes Monteiro a Jaqueline Godoy Mesquita.